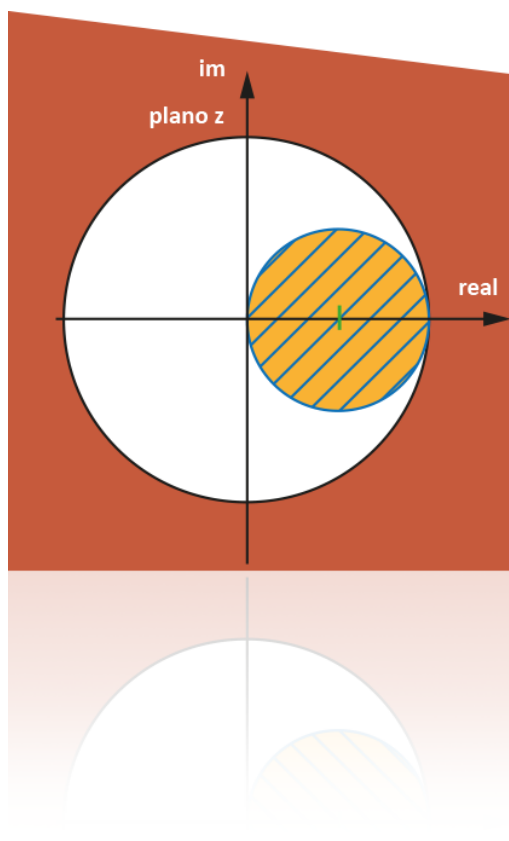


Control por computador

1. Transformada Z



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

1

Transformada Z

1.1. INTRODUCCIÓN

Una de las herramientas matemáticas más utilizada en el análisis de los sistemas de control en tiempo discreto es la transformada Z. La transformada Z permite trabajar con los sistemas discreto de forma similar a como la transformada de Laplace lo hace en los sistemas continuos.

Mientras que mediante la transformada de Laplace se convierten las ecuaciones integro-diferenciales que definen el comportamiento de un sistema en una función de transferencia algebraica en s, mediante la transformada Z se transforman las ecuaciones en diferencias en una función de transferencia algebraica de variable z. Esto permite una representación de las funciones de transferencia en forma de polos y ceros, y por tanto realizar un análisis similar al estudiado para sistemas continuos.

Se presentan en este capítulo la definición y propiedades básicas de la transformada z para su aplicación a los sistemas discretos de control.

1.1. DEFINICIÓN

La transformada Z de una función $x(t)$, donde T es el periodo de muestreo, se define mediante la siguiente expresión:

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot z^{-k}$$

que para una secuencia de números $x(k)$, quedará:

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

EJEMPLO 1.1

Calcular la función de transferencia discreta de la secuencia impulso unidad.

$$\{x_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$$

Aplicando la definición de Transformada z:

$$X(z) = Z\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

$$X(z) = 1 z^{-0} = 1$$

EJEMPLO 1.2

Calcular la función de transferencia discreta de la secuencia escalón unidad.

$$\{x_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$X(z) = 1 + 1 z^{-1} + 1 z^{-2} + 1 z^{-3} + \dots$$

Como:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{si } |x| < 1$$

$$x(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

EJEMPLO 1.3

Calcular la función de transferencia discreta de la secuencia rampa.

$$\{x_k\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$X(z) = 0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots$$

Haciendo $zX(z) - X(z)$:

$$zX(z) \rightarrow 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4} + \dots$$

$$X(z) \rightarrow -z^{-1} - 2z^{-2} - 3z^{-3} - 4z^{-4} - \dots$$

Queda:

$$zX(z) - X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

Como:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{si } |x| < 1$$

$$zX(z) - X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Entonces:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

EJEMPLO 1.4

Calcular la función de transferencia discreta de la secuencia exponencial.

$$x_k = a^k \quad \forall k \geq 0$$

$$X(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots$$

Como:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{si } |x| < 1$$

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

EJEMPLO 1.5

Comprobar la relación $z = e^{sT}$ para la señal continua $f(t) = e^{-at}$; $t > 0$.

Tiene como transformada de Laplace:

$$F(s) = \frac{1}{s+a}$$

Lo que corresponde a un polo en $s = -a$.

La secuencia obtenida al muestrear $f(t)$, $f(kT) = e^{-akT}$, tiene la siguiente transformada z :

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

Tiene un polo en $z = e^{-aT}$.

La transformada z de un sistema se relaciona con la transformada de Laplace, de ese mismo sistema, mediante la relación:

$$z = e^{sT}$$

1.3. PROPIEDADES

1.3.1. Multipliación por una constante:

$$Z\{ax_k\} = a Z\{x_k\} = a X(z)$$

1.3.2. Linealidad:

$$a Z\{x_k\} + b Z\{y_k\} = Z\{a x_k + b y_k\}$$

1.3.3. Desplazamiento:

$$Z\{x_{k-n}\} = z^{-n} X(z)$$

$$Z\{x_{k+n}\} = z^n \left[X(z) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i z^{-i} \right]$$

EJEMPLO 1.6

Calcular la transformada de la secuencia $\{x_{k+3}\}$

$$Z\{x_{k+3}\} = z^3 (X(z) - x_0 - x_1 z^{-1} - x_2 z^{-2})$$

EJEMPLO 1.7

Calcular la transformada de la secuencia escalón unidad, cuando está desplazada cuatro muestras hacia la derecha.

$$x_k \rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Z\{x_{k-4}\} = z^{-4}X(z) = z^{-4} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z^4(z-1)}$$

1.3.4. Traslación Compleja

$$x_k \rightarrow X(z)$$

$$\boxed{e^{ak} x_k \rightarrow X(e^{-a} \cdot z)}$$

EJEMPLO 1.8

Encontrar la transformada Z de la función $x_k = k e^{ak}$

$$\text{Como } Z[k] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Z[x_k] = \frac{e^{-a} z}{(e^{-a} z - 1)^2}$$

1.3.5. Diferenciación

$$x_k \rightarrow X(z)$$

$$\boxed{Z[k x_k] = -z \frac{dX(z)}{dz}}$$

EJEMPLO 1.9

Calcular la transformada de la secuencia rampa.

$$k \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$x_k \rightarrow 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$u_k \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$u_k = k x_k$$

$$Z[u_k] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1}$$

$$\boxed{Z[u_k] = -z \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}}$$

EJEMPLO 1.10

Calcular la transformada de la secuencia parabólica.

$$k \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$x_k \rightarrow 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$u_k \rightarrow 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$u_k = k x_k$$

$$Z[u_k] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Z[u_k] = -z \frac{(z-1)^2 - 2(z-1)z}{(z-1)^4} = -z \frac{z^2 - 2z + 1 - 2z^2 + 2z}{(z-1)^4}$$

$$Z[u_k] = z \frac{z^2 - 1}{(z-1)^4} = z \frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$\boxed{Z[u_k] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}}$$

1.3.6.- Teorema del valor inicial

$$\boxed{x_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)}$$

Índice positivo

1.3.7.- Teorema del valor final

$$\boxed{x_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)]}$$

EJEMPLO 1.11

Calcular el valor final de la secuencia cuya transformada es la siguiente:

$$X[z] = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$x_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \right) \right]$$

$$x_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(1 - \frac{(1-z^{-1})}{1-e^{-aT}z^{-1}} \right) \right] = 1$$

1.4. TRANSFORMADA INVERSA**1.4.1. METODO DE LA DIVISION****EJEMPLO 1.12**

Calcular la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{10z + 5}{(z-1)(z-0.2)}$$

$$X(z) = \frac{10z + 5}{z^2 - 1.2z + 0.2} = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}}$$

$$\begin{array}{rcl} 10z^{-1} + 5z^{-2} & & \angle 1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2} \\ -10z^{-1} + 12z^{-2} - 2z^{-3} & & 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3} + \dots \\ 17z^{-2} - 2z^{-3} & & \\ -17z^{-2} + 20.4z^{-3} - 3.4z^{-4} & & \\ 18.4z^{-3} - 3.4z^{-4} & & \\ -18.4z^{-3} + 22.08z^{-4} - 3.68z^{-5} & & \\ 18.68z^{-4} - 3.68z^{-5} & & \end{array}$$

El resultado:

$$X(z) = 0z^0 + 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18.4z^{-3} + 18.68z^{-4} + \dots$$

La secuencia:

$$\{x_k\} = \{0, 10, 17, 18.4, 18.68, \dots\}$$

EJEMPLO 1.13

Calcular la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{T e^{-\alpha T} z}{(z - e^{-\alpha T})^2}$$

$$X(z) = \frac{T e^{-\alpha T} z}{z^2 - 2e^{-\alpha T} z + e^{-2\alpha T}} = \frac{T e^{-\alpha T} z^{-1}}{1 - 2e^{-\alpha T} z^{-1} + e^{-2\alpha T} z^{-2}}$$

Llamando: $e^{-\alpha T} = a$

$$X(z) = \frac{a T z^{-1}}{1 - 2a z^{-1} + a^2 z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} & T a z^{-1} \quad \angle 1 - 2a z^{-1} + a^2 z^{-2} \\ & T a z^{-1} + 2T a^2 z^{-2} - T a^3 z^{-3} \quad T a z^{-1} + 2T a^2 z^{-2} + 3T a^3 z^{-3} + \dots \\ & \quad 2T a^2 z^{-2} - T a^3 z^{-3} \\ & \quad - 2T a^2 z^{-2} + 4T a^3 z^{-3} - 2T a^4 z^{-4} \\ & \quad \quad 3T a^3 z^{-3} - 2T a^4 z^{-4} \\ & \quad \quad - 3T a^3 z^{-3} + 6T a^4 z^{-4} - 3T a^5 z^{-5} \\ & \quad \quad \quad 4T a^4 z^{-4} - 3T a^5 z^{-5} \end{aligned}$$

$$X(z) = 0z^0 + T a z^{-1} + 2T a^2 z^{-2} + 3T a^3 z^{-3} + 4T a^4 z^{-4} + \dots$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k T a^k z^{-k} \rightarrow x_k = k T e^{-\alpha T k}$$

1.4.2. METODO DE EXPANSION EN FRACCIONES

Tabla de transformadas Z

	$X(z)$	x_k
1	1	1 para $k=0$ 0 para $k \neq 0$ $\delta(k)$
2	z^{-k}	1 para $k=n$ 0 para $k \neq n$ $\delta(n-k)$
3	$\frac{z}{z-1}$	1
4	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	e^{-akT}
5	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	kT
6	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$(kT)^2$
7	$\frac{T^3 z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4}$	$(kT)^3$
8	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$1-e^{-akT}$
9	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$
10	$\frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$	kTe^{-akT}
11	$\frac{z(z-(1+aT)e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^2}$	$(1-akT)e^{-akT}$
12	$\frac{T^2 e^{-aT}(z+e^{-aT})z}{(z-e^{-aT})^3}$	$(kT)^2 e^{-akT}$
13	$\frac{((aT-1+e^{-aT})z+1-e^{-aT}-aTe^{-aT})z}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$	$akT-1+e^{-akT}$
14	$\frac{\text{sen}(\omega T) \cdot z}{z^2 - 2\cos(\omega T) \cdot z + 1}$	$\text{sen}(\omega kT)$

15	$\frac{(z - \cos(\omega T)) \cdot z}{z^2 - 2 \cos(\omega T) \cdot z + 1}$	$\cos(\omega k T)$
16	$\frac{e^{-aT} \operatorname{sen}(\omega T) \cdot z}{z^2 - 2e^{-aT} \cos(\omega T) \cdot z + e^{-2aT}}$	$e^{-akT} \operatorname{sen}(\omega k T)$
17	$\frac{(z - e^{-aT} \cos(\omega T)) \cdot z}{z^2 - 2e^{-aT} \cos(\omega T) \cdot z + e^{-2aT}}$	$e^{-akT} \cos(\omega k T)$
18	$\frac{z}{z - a}$	a^k
19	$\frac{1}{z - a}$	$a^{k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots$
20	$\frac{z}{(z - a)^2}$	ka^{k-1}
21	$\frac{z(z + a)}{(z - a)^3}$	$k^2 a^{k-1}$
22	$\frac{z(z^2 + 4az + a^2)}{(z - a)^4}$	$k^3 a^{k-1}$
23	$\frac{z(z^3 + 11az^2 + 11a^2z + a^3)}{(z - a)^5}$	$k^4 a^{k-1}$
24	$\frac{z}{z + a}$	$a^k \cos(k\pi)$
25	$\frac{z}{(z - 1)^3}$	$\frac{k(k-1)}{2}$
26	$\frac{z}{(z - 1)^m}$	$\frac{k(k-1) \cdots (k-m+2)}{(m-1)!}$
27	$\frac{z}{(z - a)^3}$	$\frac{k(k-1)}{2} a^{k-2}$
28	$\frac{z}{(z - a)^m}$	$\frac{k(k-1) \cdots (k-m+2)}{(m-1)!} a^{k-m+1}$

EJEMPLO 1.14

Calcular la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-0.2)}$$

POLOS REALES SIMPLES

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0.2} = \frac{Az - 0.2A + Bz - B}{(z-1)(z-0.2)}$$

$$A = 12.5; \quad B = -12.5;$$

$$x(z) = 12.5 \frac{z}{z-1} - 12.5 \frac{z}{z-0.2}$$

Tablas:

$$\boxed{x_k = 12.5(1 - 0.2^k)}$$

EJEMPLO 1.15

Calcular la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{2z^3 + z}{(z-2)^2(z-1)}$$

POLOS REALES MULTIPLES

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{2z^2 + 1}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{A}{(z-2)^2} + \frac{B}{(z-2)} + \frac{C}{(z-1)}$$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{Az - A + Bz^2 - 3Bz + 2B + Cz^2 - 4Cz + 4C}{(z-2)^2(z-1)}$$

$$A = 9; \quad B = -1; \quad C = 3;$$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{9}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)} + \frac{3}{(z-1)}$$

Tablas:

$$\boxed{x_k = 9k2^{k-1} - 2^k + 3}$$

EJEMPLO 1.16

Calcular la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{z^2 + 6z}{(z^2 - 2z + 2)(z - 1)}$$

POLOS COMPLEJOS CONJUGADOS

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{Mz + N}{(z^2 - 2z + 2)}$$

$$A = 7; \quad M = -7; \quad N = 8;$$

$$x(z) = 7 \frac{z}{(z-1)} - \frac{(7z-8)z}{(z^2 - 2z + 2)}$$

$$x(z) = 7 \frac{1}{(1-z^{-1})} - 7 \frac{(1-1.14z^{-1})}{(1-2z^{-1}+2z^{-2})} = 7(x_1 + x_2)$$

Comparando con 16 y 17 de la tabla de transformadas z:

$$e^{-akT} \cos(kwT) \rightarrow \frac{1 - e^{-aT} z^{-1} \cos(wT)}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos(wT) + e^{-2aT} z^{-2}}$$

$$e^{-akT} \sin(kwT) \rightarrow \frac{e^{-aT} z^{-1} \sin(wT)}{1 - 2e^{-aT} z^{-1} \cos(wT) + e^{-2aT} z^{-2}}$$

$$x_2 = \frac{(1-z^{-1})}{(1-2z^{-1}+2z^{-2})} - \frac{1}{7} \frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1}+2z^{-2})}$$

Comparando con 16 y 17 de la tabla de transformadas z:

$$e^{-aT} = \sqrt{2} \quad ; \quad wT = \frac{\pi}{4} \quad ;$$

$$\cos(wT) = \sin(wT) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_2 = \frac{(1-\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1})}{(1-2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1} + 2z^{-2})} - \frac{1}{7} \frac{\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1}}{(1-2\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-1} + 2z^{-2})}$$

Entonces:

$$x_k = 7 - 7(\sqrt{2})^k \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + (\sqrt{2})^k \sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)$$

1.4.3. METODO DE LOS RESIDUOS

$$x_k = \sum_{\forall \text{ polos}} (\text{Residuos de } X(z))$$

Residuos de Polos Simples:

$$\text{Residuo}|_{z=a} = \left[(z-a)X(z)z^{k-1} \right]_{z=a}$$

Residuos de Polos Múltiples:

$$\text{Residuo}|_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m X(z)z^{k-1} \right) \right]_{z=a}$$

EJEMPLO 1.17

Calcular la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

$$x_k = \sum_{\forall \text{ polos}} (\text{Residuos de } X(z))$$

Dos Polos Simples, Dos Residuos:

$$\text{Residuo}|_{z=a} = \left[(z-a)X(z)z^{k-1} \right]_{z=a}$$

$$\text{Residuo}|_{z=1} = \left[(z-1) \frac{z}{(z-1)(z-2)} z^{k-1} \right]_{z=1} = -1$$

$$\text{Residuo}|_{z=2} = \left[(z-2) \frac{z}{(z-1)(z-2)} z^{k-1} \right]_{z=2} = 2^k$$

$$x_k = 2^k - 1$$

EJEMPLO 1.18

Calcular la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$x_k = \sum_{\forall \text{ polos}} (\text{Residuos de } X(z))$$

Un Polo Múltiple, Un Residuo:

$$\left. \text{Residuo} \right|_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m X(z) z^{k-1} \right) \right]_{z=a}$$

$$\left. \text{Residuo} \right|_{z=1} = \frac{1}{(2-1)!} \left[\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left((z-1)^2 \frac{z}{(z-1)^2} z^{k-1} \right) \right]_{z=1}$$

$$\left. \text{Residuo} \right|_{z=1} = \left[\frac{d}{dz} (z^k) \right]_{z=1} = k$$

$$\boxed{x_k = k}$$

Secuencia Rampa

EJEMPLO 1.19

Calcular la transformada inversa de:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2 (z-e^{-aT})}$$

$$x_k = \sum_{\forall \text{ polos}} (\text{Residuos de } X(z))$$

Dos Residuos:

$$\left. \text{Residuo} \right|_{z=a} = \left[(z-a) X(z) z^{k-1} \right]_{z=a}$$

$$\left. \text{Residuo} \right|_{z=e^{-aT}} = \left[(z-e^{-aT}) \frac{z^2}{(z-1)^2 (z-e^{-aT})} z^{k-1} \right]_{z=e^{-aT}}$$
