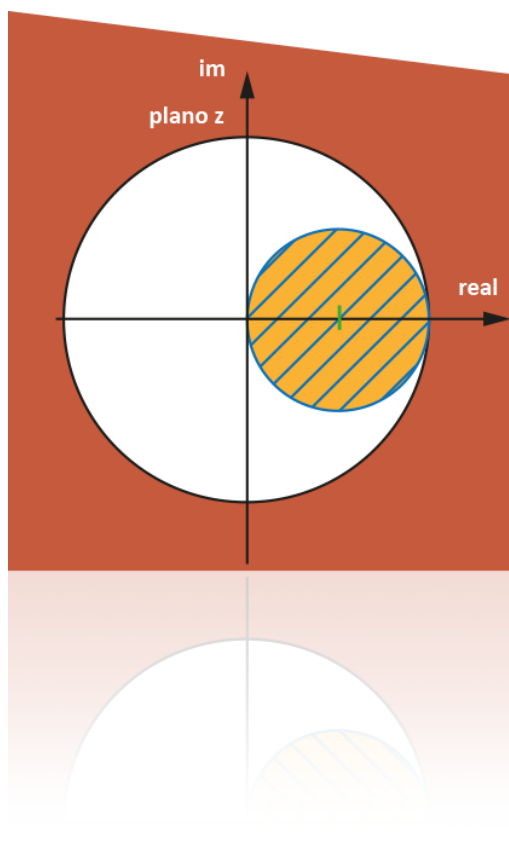


# Control por computador

## 10. Diseño directo de reguladores



### Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

*Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)*

# **10**

## **Diseño Directo de Reguladores**

### **10.1. INTRODUCCIÓN**

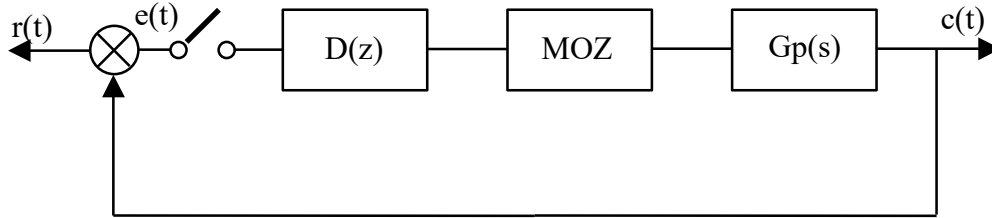
En los apartados anteriores hemos visto métodos de diseño de controladores digitales que tenían mucho que ver con los métodos utilizados para los sistemas continuos, unos porque realmente se diseñaba el control para el sistema continuo y luego se discretizaba y otros porque las técnicas utilizadas eran muy similares a las utilizadas en los sistemas continuos.

En este apartado, por el contrario, vamos a ver una técnica de diseño propia de los sistemas discretos. Es el método denominado Diseño de controladores digitales por cancelación de polos, Diseño Directo o Método de Truxal.

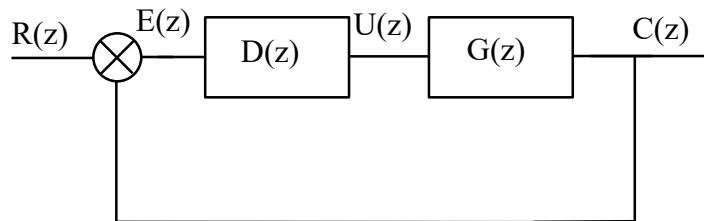
En este método se calculan reguladores de forma matemática sin imponer limitaciones a la forma final del regulador como ocurre con los reguladores tipo PID. Es decir no se ponen restricciones al número de polos y ceros que puede llegar a tener dicho regulador. Sólo se pondrán limitaciones en el sentido de que el regulador obtenido sea físicamente realizable y condiciones sobre el tratamiento de las inestabilidades que puedan existir en el sistema inicial.

## 10.2. CONDICIONES DE DISEÑO

Suponemos que se desea calcular el controlador digital que nos permita controlar el comportamiento del sistema de la figura:



Y en la figura siguiente tenemos el equivalente discreto del sistema anterior.



La función de transferencia de lazo cerrado del sistema (FTLC) es:

$$M(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (1)$$

Nos interesa obtener el controlador  $D(z)$ , que despejándolo de la ecuación (1):

$$D(z) = \frac{M(z)}{G(z)[1 - M(z)]}$$

Ver que si el sistema tuviese una realimentación no unitaria sería:

$$D(z) = \frac{M(z)}{[G(z) - GH(z)M(z)]} = \frac{M(z)}{G(z) \left[ 1 - \frac{GH(z)}{G(z)} M(z) \right]}$$

Se desea que el controlador que obtengamos sea físicamente realizable para poder implementarlo, esto va a imponer una serie de condiciones y de relaciones entre  $M(z)$  y  $D(z)$ .

### 10.2.1. Condiciones y relaciones de Causalidad

- El orden del numerador de  $D(z)$  debe ser menor o igual que el orden de su denominador. En otro caso el controlador necesitaría entradas futuras para dar salida actuales.
- Si la planta continua  $G(s)$  tiene un retardo de transporte,  $e^{-Ls}$ , entonces el modelo deseado del sistema en lazo cerrado debe tener, al menos, este retardo. De lo contrario estaríamos buscando un sistema que nos proporcionase la respuesta antes de que la entrada sea dada.
- Si  $G(z)$  es expandida es una serie en  $z^{-1}$ , la menor potencia de la serie de  $M(z)$  debe ser, al menos, tan grande (pero en negativo) como el de  $G(z)$ . Por ejemplo, si la expansión de  $G(z)$  comienza con el término  $z^{-1}$ , entonces el primer término de  $M(z)$  debe ser en  $z^{-1}$  o mayor ( $z^{-2}, z^{-3}, z^{-4}, \dots$ ).

$$G(z) = g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_n z^{-n}$$

$$M(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$$

Donde:

$n$  es el orden de la planta del sistema.

$N$  es el orden del regulador.  $N \geq n$ .

Esto significa que la planta no puede responder instantáneamente cuando es aplicada una señal de control, de magnitud finita. La respuesta llega con un retardo de , al menos, un periodo de muestreo, si la expansión de  $G(z)$  comienza en  $z^{-1}$ .

Todo esto indica que el modelo debe tener, al menos, el mismo retardo que la planta.

### 10.2.2. Condiciones de Estabilidad.

Debemos evitar el cancelar un polo inestable de la planta con un cero del controlador digital. Esto es porque cualquier pequeño error en la cancelación del polo inestable, con un cero del controlador, va a suponer que tengamos un lugar de las raíces en ese punto para todo valor de  $K$  (ver que aunque la cancelación se produce en la FTLD, al no cancelarse exactamente tenemos una rama del lugar de las raíces muy corta y en la zona inestable).

Vemos que pasa con el modelo,  $M(z)$ , se  $G(z)$  tiene un polo inestable en  $a$ :

$$G(z) = \frac{G_1(z)}{(z-a)}$$

La función de lazo cerrado será:

$$M(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 - D(z)G(z)} = \frac{D(z) \frac{G_1(z)}{(z-a)}}{1 + D(z) \frac{G_1(z)}{(z-a)}}$$

Y como el controlador es de la forma:

$$D(z) = \frac{M(z)}{G(z)[1 - M(z)]}$$

Vemos que, para que  $D(z)$  no tenga el polo inestable de  $G(z)$  como cero,  $[1 - M(z)]$  debe tener este polo inestable como cero.

- Si la planta tiene polos inestables (ó críticamente estables), todos estos deberán estar incluidos como ceros de  $[1 - M(z)]$ .
- Los ceros de  $G(z)$  que están dentro del círculo unidad pueden ser cancelados por polos de  $G(z)$ , sin embargo, los ceros de  $G(z)$  que están fuera del círculo unidad no pueden ser cancelados por  $D(z)$ . Entonces todos los ceros de  $G(z)$  que estén sobre o fuera del círculo unidad deben estar incluidos como ceros de  $M(z)$ .

### 10.3. PASOS DE DISEÑO

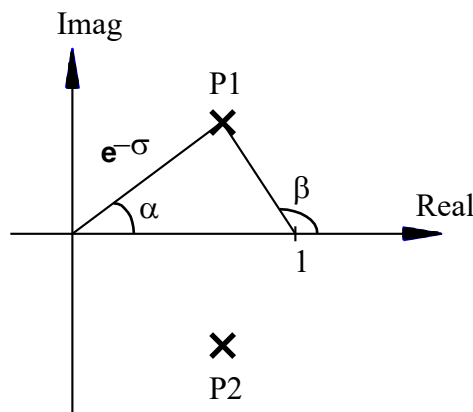
#### 10.3.1. Selección del modelo

En este paso se selecciona aquel modelo de sistema que funciona como indican las especificaciones indican. Para ello se escogerá un sistema con la forma canónica de un sistema de segundo orden:

$$M(z) = \frac{k}{z^2 + a z + b}$$

Para la selección de este modelo utilizaremos, principalmente, las especificaciones de la respuesta deseada:

Para un sistema de segundo orden, podemos indicar la posición de sus polos mediante la notación que aparece en la figura.



Y la relación entre las especificaciones temporales y la posición de los polos vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\text{Tiempo de subida: } k_r = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{Tiempo de pico: } k_p = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\text{Sobreimpulso: } M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}}$$

$$\text{Tiempo de establecimiento: } k_s = \frac{\pi}{\sigma}$$

Con estas relaciones obtenemos  $\alpha$  y  $\sigma$ , y a continuación vemos la posición de los polos:

$$P_{1,2} = e^{-\sigma} \cos(\alpha) \pm j e^{-\sigma} \sin(\alpha) = A \pm j B$$

Y el denominador del modelo será:

$$(z - p_1)(z - p_2) = (z - A + jB)(z - A - jB) = z^2 - 2Az + A^2 + B^2$$

$$(z - p_1)(z - p_2) = z^2 - 2e^{-\sigma} \cos(\alpha)z + e^{-2\sigma}$$

Entonces el modelo definitivo del sistema queda de esta forma:

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 2e^{-\sigma} \cos(\alpha)z + e^{-2\sigma}}$$

### 10.3.2. Comprobación de causalidad.

Para que el sistema sea físicamente realizable debe cumplirse que el retardo del modelo sea mayor o igual que el retardo de la planta discretizada.

$$\text{gr}(D_M) - \text{gr}(N_M) \geq \text{gr}(D_G) - \text{gr}(N_G)$$

Esta comprobación se debe realizar siempre que se modifique el modelo.

En el caso de que la condición de causalidad no se cumpla se añadirán polos en el origen del denominador del modelo. Esto no modifica la forma de la respuesta temporal del modelo pero si el retardo de esta.

Al poner los polos en el origen ( $z$ ) en el denominador del modelo estamos aumentando el retardo de la respuesta del sistema, luego una forma de solucionarlo es volviendo a las especificaciones, modificándolas (pidiendo tiempos anteriores).

### 10.3.3. Estabilidad

Como hemos visto antes, si la planta tiene polos o ceros fuera del círculo unidad puede llevar al sistema en lazo cerrado a la inestabilidad, por este motivo:

- Si  $G(z)$  tiene polos fuera del círculo unidad:  
 $[1 - M(z)]$ , o  $\left[1 - \frac{GH(z)}{G(z)} M(z)\right]$  si existe  $H(z)$ , debe tener como ceros los polos inestables de  $G(z)$ .

Ver que puede que tengamos que modificar el denominador de  $M(z)$ , metiendo polos en el origen, para que se siga cumpliendo causalidad. En este caso, además, se multiplicarán estos polos por un polinomio  $P(z)$  cuyo orden será el mismo que el número de polos en el origen hayamos metido y cuyos coeficientes se calcularán de forma que el grado del numerador de  $M(z)$  sea el mismo que el número de polos inestables metidos en  $(1 - M(z))$ .

- Si  $G(z)$  tiene ceros fuera del círculo unidad:  
 $M(z)$  debe tener como ceros los ceros de  $G(z)$  que estén fuera del círculo unidad.

### 10.3.4. Simplicidad

El aplicar simplicidad nos va a llevar a obtener reguladores más sencillos de implementar en el computador, pero también, en ciertos casos, nos puede llevar a modificar el comportamiento dinámico del modelo y por lo tanto a la realización de un regulador no deseado.

Al aplicar simplicidad debemos poner todos los ceros de  $G(z)$  y todos los polos de  $GH(z)$  que no estén en  $G(z)$  como ceros del modelo.

Es claro ver que estamos modificando el modelo.

### 10.3.5. Comportamiento estático

En este apartado calculamos el valor de la ganancia  $K$  del modelo, o del parámetro sobrante del polinomio  $P(z)$ , para que el error en estado estacionario sea el requerido.

El valor en régimen permanente del sistema en estado estacionario cuando la entrada es un escalón unidad debe ser igual a 1 menos el error pedido:

$$\lim_{z \rightarrow 1} M(z) = 1 - \text{error}$$