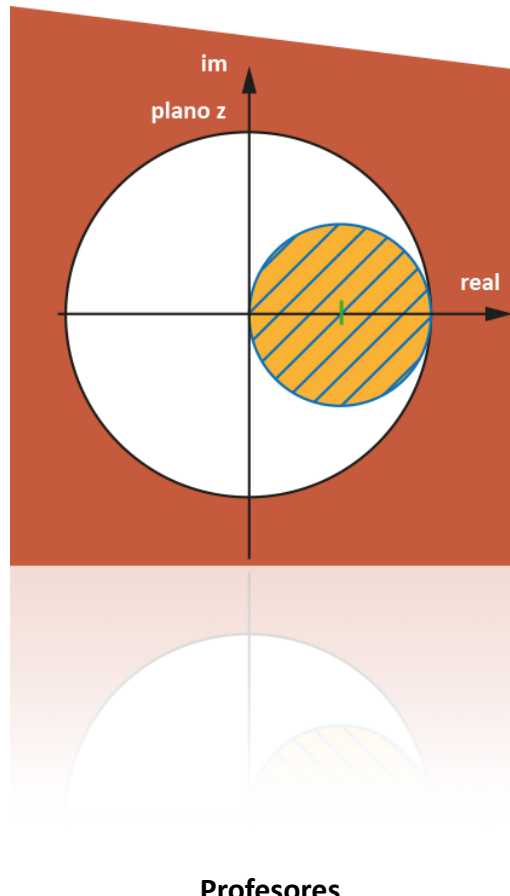


Control por computador

11. Respuesta en frecuencia



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

11

Respuesta en Frecuencia

11.1. INTRODUCCIÓN

Otra de las técnicas que se puede aplicar a los sistemas de control en tiempo discreto es el análisis de la respuesta en frecuencia del sistema.

Por tanto igual que para sistemas en tiempo continuo a la hora de diseñar reguladores los métodos de respuesta en frecuencia permiten obtener reguladores aplicando criterios sencillos.

La principal ventaja del método de Bode es que nos permite obtener una representación de la respuesta en frecuencia del sistema en lazo abierto de una forma rápida y mediante gráficas realizadas a mano.

Ventajas de la representación mediante los gráficos de Bode:

- 1) Las gráficas de los sistemas en serie simplemente se suman.
- 2) Se puede mostrar un amplio espectro del comportamiento en frecuencia (alta y baja).
- 3) Las gráficas de Bode se pueden obtener experimentalmente.
- 4) Se pueden diseñar compensadores a partir de las Gráficas de Bode.

11.2. RESPUESTA EN FRECUENCIA PARA UN SISTEMA DISCRETO

La respuesta en frecuencia de un sistema discreto cuya función de transferencia es $G(z)$ se puede obtener sustituyendo $z = e^{j\omega T}$. En este caso al realizar la sustitución en la función de transferencia se pierde la simplicidad que se obtenía en sistemas continuos para su resolución:

Por ejemplo, dado un sistema cuya función de transferencia discreta sea:

$$G(z) = \frac{z}{z - a}$$

si realizamos el cambio $z = e^{j\omega T}$ obtenemos:

$$G(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - a} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T}} = \frac{1}{1 - a \cos(\omega T) + j \cdot a \sin(\omega T)}$$

En esta expresión la función de transferencia ya no viene definida por una función racional y por tanto pierde la simplicidad de análisis que se tenía en los sistemas continuos.

Donde la amplitud vendrá dada por:

$$\begin{aligned} A &= \left| G(e^{j\omega T}) \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos(\omega T))^2 + (a \sin(\omega T))^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(\omega T) + (a \cos(\omega T))^2 + (a \sin(\omega T))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega T)}} \end{aligned}$$

Y la fase será:

$$\varphi = -\arctg \frac{a \cdot \sin(\omega T)}{1 - a \cdot \cos(\omega T)}$$

Dada la complejidad a la que se llega en estas expresiones, se desechará la aplicación directa de los métodos de respuesta en frecuencia para los sistemas discretos.

Una forma de simplificar el estudio y poder utilizar los métodos clásicos de respuesta en frecuencia será aplicar la transformación bilineal al sistema discreto. De esta forma se transforma en un sistema continuo equivalente en el plano w al que sí se puede aplicar la teoría clásica. Es decir, aplicando la transformación bilineal transformamos el plano z en el plano w para poder trabajar con si se tratara del plano s .

La transformación bilineal está definida como:

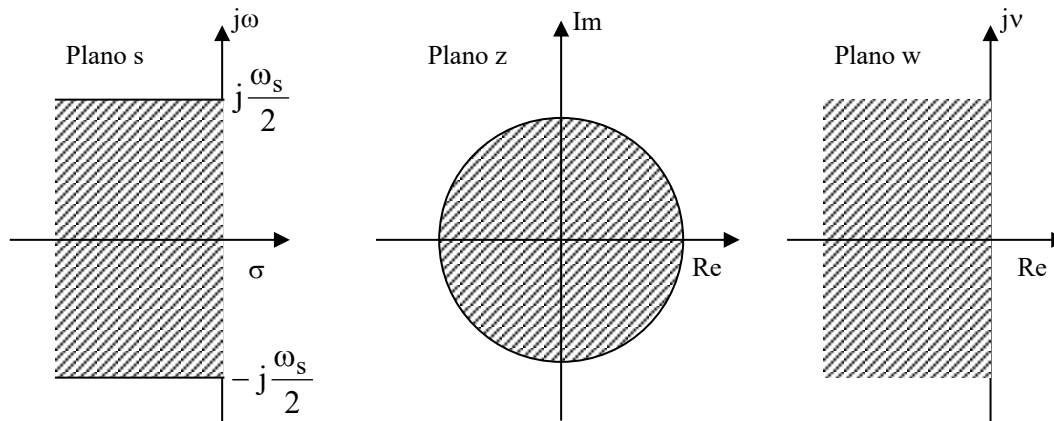
$$z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w}$$

donde T es el periodo de muestreo.

Mediante este cambio de variable, transformamos el interior del círculo unidad en el semiplano real negativo. La función de transferencia $G(w)$ resultante es de fase no mínima

Pero aunque estas correspondencias nos permiten aplicar al plano w la teoría definida para el plano s , existen diferencias entre ambos planos. La principal es que la escala de frecuencias aparece comprimida.

Esto es debido a que cuando aplicamos la transformada z sólo se transforma la banda primaria del semiplano izquierdo del plano s $\left(-\frac{1}{2}\omega_s < \omega < \frac{1}{2}\omega_s\right)$, al interior del círculo unitario en el plano z , y en cambio al transformar del plano z al plano w si se transforma la totalidad del plano $(-\infty < v < \infty)$.



Una vez se ha transformado el sistema al plano w se pueden utilizar las técnicas convencionales de respuesta en frecuencia y las de diseño mediante la respuesta frecuencial del sistema.

La frecuencia v representa una frecuencia ficticia. Aunque el plano w se parece geométricamente al planos, el eje de frecuencias en el plano w está distorsionado. La frecuencia ficticia v y la frecuencia real ω están relacionadas mediante la siguiente expresión:

$$w|_{w=jv} = jv = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

luego:

$$v = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

Para ωT pequeño, la frecuencia ficticia se parece mucho a la frecuencia real.

11.2.1. Pasos para dibujar el diagrama de Bode

- 1.- Obtener el equivalente discreto de la función de transferencia de lazo abierto de la planta utilizando un mantenedor: $G(z)$
- 2.- Aplicando la transformación bilineal a la función $G(z)$ se obtiene $G(w)$.
- 3.- Sustituir w por jv
- 4.- Trazar el diagrama de Bode

11.3. RESUMEN DEL TRAZADO DE BODE ASINTÓTICO

En este apartado recordaremos las técnicas de Bode para sistemas continuos.

Para la respuesta frecuencial de la amplitud se emplea una escala logarítmica y para la respuesta frecuencial de la fase se emplea una escala lineal. De esta forma es posible dibujar la respuesta en frecuencia de cualquier FTLA, por muy alto orden que tenga, mediante la adición gráfica de las aportaciones de cada término por separado.

- Amplitud: Decibelios en función del logaritmo de la frecuencia.
- Fase: Lineal en función del logaritmo de la frecuencia.

11.3.1. Representación asintótica

Se ha de poner la FTLA de la forma siguiente:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_j [1 + 2\delta_j (j\omega / \omega_{n_j}) + (j\omega / \omega_{n_j})^2]}{(j\omega)^n \prod_k (1 + j\omega T_k) \prod_m [1 + 2\delta_m (j\omega / \omega_{n_m}) + (j\omega / \omega_{n_m})^2]}$$

En la FTLA vamos a encontrar cuatro tipos de términos diferentes:

- 1- Ganancia: K .
- 2- Polos u Ceros en el origen: $(j\omega)^{\pm n}$.
- 3- Polos y Ceros en el eje real: $(1 + j\omega T)^{\pm n}$.
- 4- Polos y Ceros complejos conjugados: $[1 + 2\delta(j\omega / \omega_n) + (j\omega / \omega_n)^2]$.

Vemos a continuación las aportaciones en fase y módulo de cada uno de los términos:

1) Ganancia: K .

Módulo:

$$M = 20 \log K = \text{cte}$$

Fase:

$$\text{Arg} = \arctg\left(\frac{0}{K}\right) = 0^\circ$$

Vemos, entonces, que la ganancia contribuye con:

- una recta horizontal de valor constante para la magnitud
- un argumento nulo para la fase.

2) Polos y Ceros en origen: $(jw)^{\pm n}$.

Módulo: Cero: $M = 20 \log |(jw)^n| = 20n \log(w)$ Son (+20n dB/dc).

Polo: $M = 20 \log |(jw)^{-n}| = -20n \log(w)$ Son (-20n dB/dc).

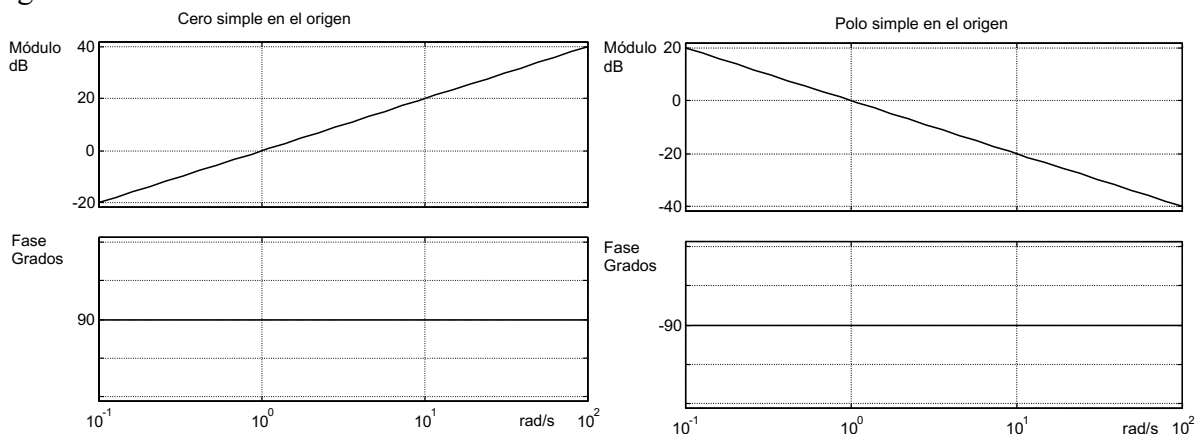
Fase: Cero: $\text{Arg} = \arctg\left(\frac{w}{0}\right) = 90^0$

Polo: $\text{Arg} = -\arctg\left(\frac{w}{0}\right) = -90^0$

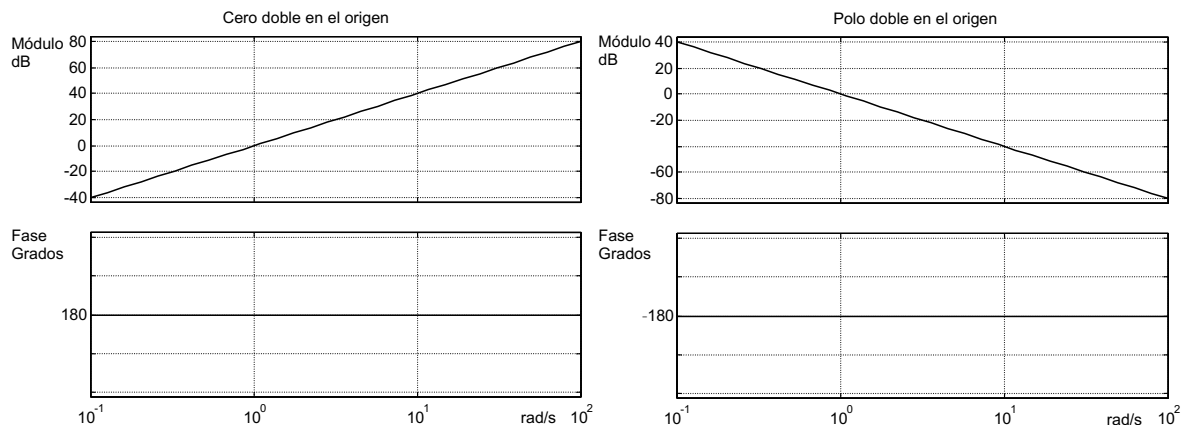
Frecuencia esquina : 1 rad/sg.

- Un cero en el origen aporta, en Módulo, una línea recta de pendiente +20n dB/dc y en Fase una recta horizontal de +90°.
- El polo en el origen aporta una línea recta de pendiente -20n dB/dc y en Fase una recta horizontal de -90°.
- Vemos también que la frecuencia esquina está en 1 rad/sg ya que para esta frecuencia es cuando el módulo es nulo y pasa por el punto de 0 dBs.

En la figura se pueden ver las gráficas de módulo y fase para un cero y polo simple en el origen.



En la figura podemos ver las gráficas de módulo y fase de un polo doble en el origen.



3) Polos y Ceros en eje real $(1 + j\omega T)^{\pm n}$ **MODULO:**

Cero: $M = 20 \log |(1 + j\omega T)^n| = 20n \log (\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = 10n \log (1 + \omega^2 T^2)$

Para pequeños valores de frecuencia, $\omega T \ll 1$: $M \approx 0$. Son (0dB/dc)

Para grandes valores de frecuencia, $\omega T \gg 1$: $M \approx 20n \log(\omega)$. Son (+20dB/dc).

Polo: $M = 20 \log |(1 + j\omega T)^{-n}| = -20n \log (\sqrt{1 + \omega^2 T^2}) = -10n \log (1 + \omega^2 T^2)$

Para pequeños valores de frecuencia, $\omega T \ll 1$: $M \approx 0$. Son (0dB/dc)

Para grandes valores de frecuencia, $\omega T \gg 1$: $M \approx -20n \log(\omega)$. Son (-20dB/dc).

FASE:

Cero: $\text{Arg} = n \arctg\left(\frac{\omega T}{1}\right)$

Para pequeños valores de frecuencia, $\omega T \ll 1$: $\text{Arg} = 0$.

Para grandes valores de frecuencia, $\omega T \gg 1$: $\text{Arg} = 90^\circ n$.

Para $\omega = \omega_{\text{esq}} = 1/T$: $\text{Arg} = \arctg(1) = 45^\circ n$

Polo: $\text{Arg} = -n \arctg\left(\frac{\omega T}{1}\right)$

Para pequeños valores de frecuencia, $\omega T \ll 1$: $\text{Arg} = 0$.

Para grandes valores de frecuencia, $\omega T \gg 1$: $\text{Arg} = -90^\circ n$.

Para $\omega = \omega_{\text{esq}} = 1/T$: $\text{Arg} = -\arctg(1) = -45^\circ n$.

Frecuencia esquina: $\omega_{\text{esq}} = 1/T$.

Entonces vemos que los ceros en el eje real nos proporcionan:

a) En módulo:

Dos asíntotas, una de 0 dB/dc (por debajo de la frecuencia esquina) y otra de +20n dB/dc (por encima de la frecuencia esquina).

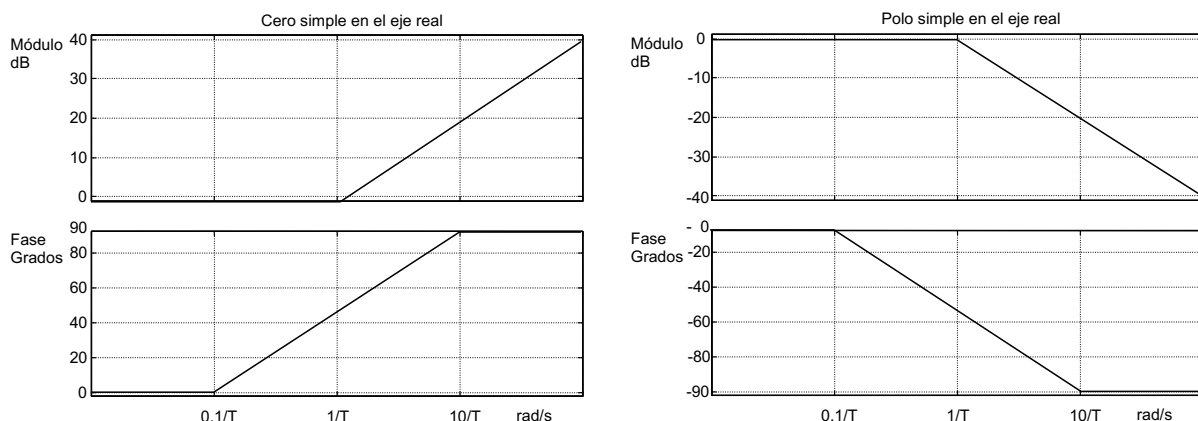
b) En fase:

0° para frecuencias menores de una década por debajo de la esquina.

90° para mayores de una década por encima de la esquina.

45° entre una década por debajo y por encima.

En la figura pueden verse las gráficas para cero y un polo simple en el eje real.



3) Polos y Ceros Complejos Conjugados $\left[1 + 2\delta \left(\frac{jw}{w_n} \right) + \left(\frac{jw}{w_n} \right)^2 \right]^{\pm 1}$

En este caso solo vamos a ver el caso de un polo complejo conjugado de orden 1.

MODULO:

$$M = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2} \right)^2 + \left(2\delta \frac{w}{w_n} \right)^2} = -10 \log \left[\left(1 - \frac{w^2}{w_n^2} \right)^2 + \left(2\delta \frac{w}{w_n} \right)^2 \right]$$

Para frecuencias muy bajas, $w/w_n \ll 1$: $M = -10 \log(1) = 0$.

Para frecuencias muy altas, $w/w_n \gg 1$: $M = -10 \log[w^4] = -40 \log(w)$.

Para la frecuencia esquina, $w=w_n$: $M = -20 \log[2\delta]$.

FASE:

$$\text{La fase viene dada por: } \text{Arg} = \arctg \left[\frac{2\delta \frac{w}{w_n}}{1 - \left(\frac{w}{w_n} \right)^2} \right]$$

Para bajas frecuencias, $w/w_n \ll 1$: $\text{Arg} = \arctg[0] = 0^\circ$

Para frecuencias muy altas, $w/w_n \gg 1$: $\text{Arg} = \arctg[-0] = -180^\circ$.

Para la frecuencia esquina, $w=w_n$: $\text{Arg} = \arctg[-\infty] = -90^\circ$.

Entonces vemos que nos aporta el término complejo conjugado:

a) En Módulo:

Se observan dos asíntotas. La primera, de 0dB, es para frecuencias por debajo de la esquina, y la segunda, de -40 dB/dc, para frecuencias por encima de la frecuencia esquina.

b) En fase:

Podemos pensar que existen dos asíntotas, una de 0° para frecuencias una década por debajo de la esquina y otra de -180° para frecuencias por encima de una década de la esquina.

