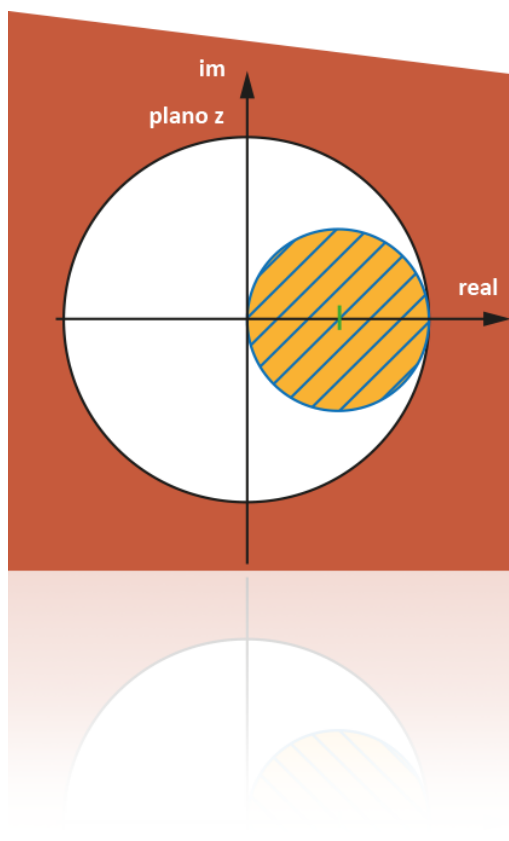


Control por computador

2. Muestreo y reconstrucción



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

2

Muestreo y reconstrucción

2.1. INTRODUCCIÓN

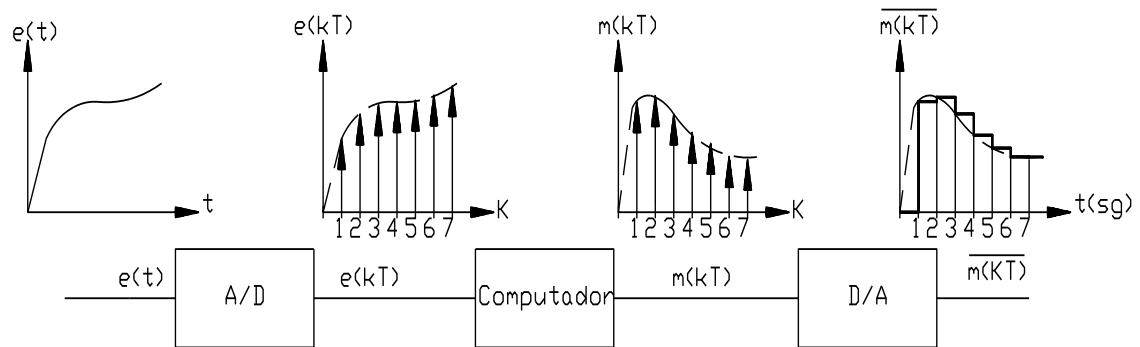
En los sistemas de control en tiempo discreto, las señales generadas y procesadas por el computador son señales digitales, pero las señales que se toman de la planta a controlar y las señales con las que se debe realizar el control del sistema son señales analógicas.

En estos sistemas aparecen por tanto mezclados funciones de control discretas para trabajar en el computador con las funciones de transferencia continuas pertenecientes al sistema físico a controlar.

Por tanto las señales analógicas que se toman del sistema a controlar han de ser muestreadas para su conversión en señales digitales a las que se pueda aplicar el sistema de control discreto, y las señales digitales obtenidas de cómo resultado del algoritmo de control necesitan un elemento de conversión de nuevo en señales analógicas para poder ser aplicadas al sistema físico.

En el presente capítulo se presenta un resumen básico de la teoría de muestreo y reconstrucción de señales.

2.2. ESQUEMA BÁSICO



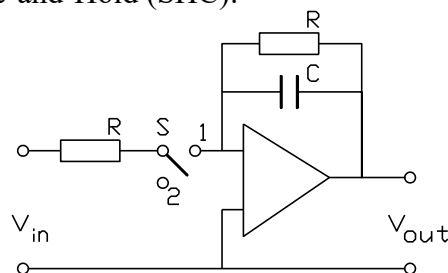
- Entrada del sistema continua.
- Conversor Analógico-Digital (A/D):
Proporciona una secuencia numérica, $e(kT)$, correspondiente a los valores de la señal de entrada en los instantes de muestreo.
- Computador:
Algoritmo de control.
- Conversor Digital-Analógico (DA):
Transforma la secuencia de salida del computador en una señal continua.

La parte esencial de los sistemas de conversión: Muestreadores (Sampler).
Mantenedores (Hold).

2.3. ESTRUCTURA SAMPLE-AND-HOLD

El CD/A lleva un Hold.

El CA/D lleva un Sample-and-Hold (SHC):



Interruptor S controlado por reloj (periodo de muestreo).

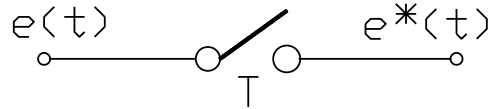
- S=1: Salida igual a entrada ($1/(RCs+1)$).
 $1/RC$ suficientemente elevada.
Conversor A/D desconectado.
- S=2: CA/D conectado al SHC.
Sistema aislado de la entrada.
 C mantiene la salida. "Conversión".

El Hold no interviene en la función de transferencia del muestreador.

2.4. ANÁLISIS DEL MUESTREADOR

2.4.1. En el tiempo

Modulación de amplitud de impulsos.



Secuencia de impulsos desplazados:

$$e^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \delta(t - kT)$$

Transformada de Laplace de la salida:

$$E^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^*(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^*(\tau) \delta(\tau - kT) e^{-s\tau} d\tau$$

Llamando $f(\tau) = e(\tau) * e^{-s\tau}$:

$$E^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - kT) d\tau$$

Propiedad del impulso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT) dt = f(kT)$$

$$E^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - kT) d\tau$$

$$E^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) e^{-skT}$$

$$E^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) e^{-skT}$$

Comparando con la transformada z:

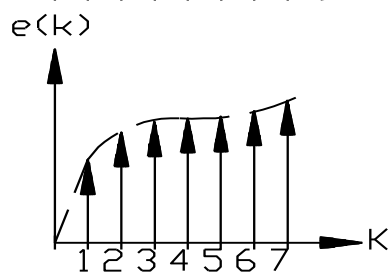
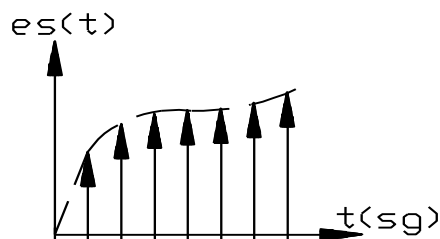
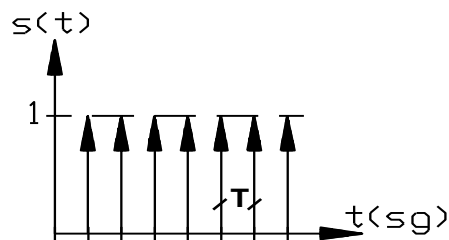
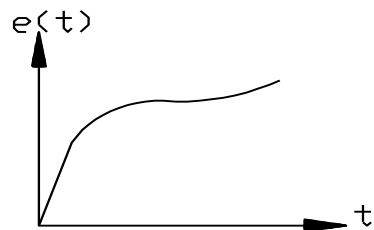
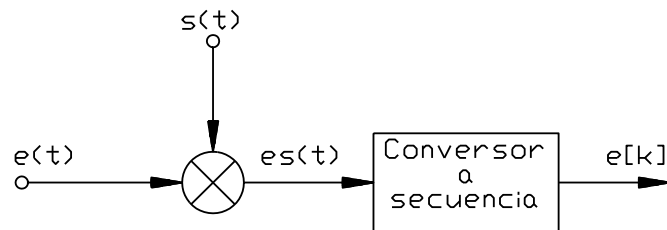
$$E(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) z^{-k}$$

Para pasar de una otra hacer el cambio:

$$z = e^{sT}$$

2.4.2. En frecuencia

Modelo:



$$e_s(t) = e(t) s(t)$$

La transformada de Fourier:

$$E_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} (E(j\omega) * S(j\omega))$$

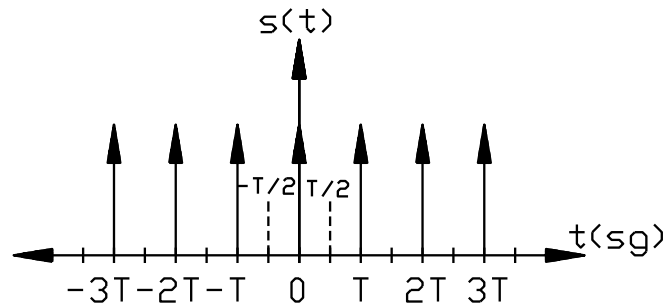
$s(t)$ es una secuencia de impulsos unitarios desplazados en el tiempo:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Fourier de una señal periódica:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{jk\omega_0 t} dt$$



Los coeficientes, integrando en un periodo:

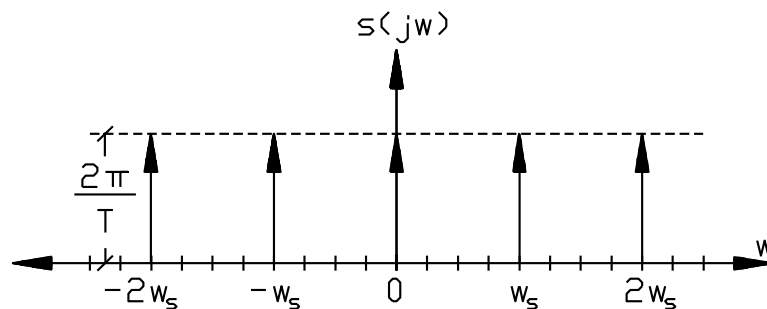
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{jk\omega t} dt = \frac{1}{T}$$

Fourier de la señal moduladora será:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

ω_s : frecuencia de muestreo (moduladora)

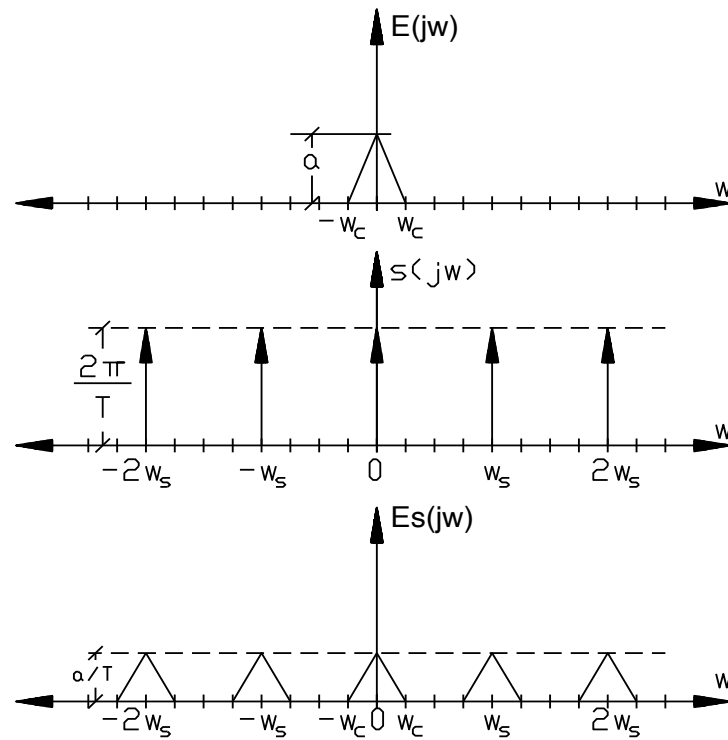
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$



$$E_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} (E(j\omega) * S(j\omega))$$

$$E_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(E(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right)$$

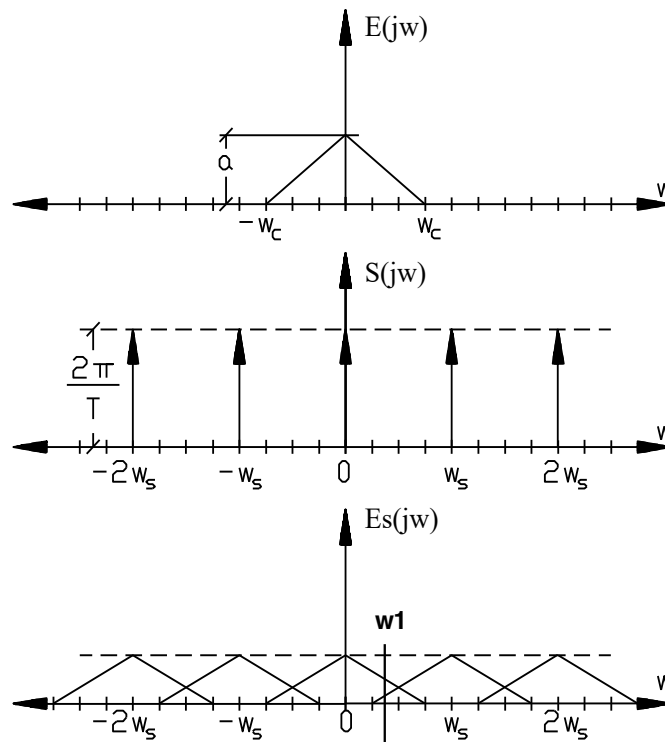
$$E_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(j\omega - jk\omega_s)$$



Como $s=jw$ y $E_s(jw)=E^*(s)$:

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(s - jk\omega_s)$$

Si no se elige la frecuencia de muestreo correctamente: "Solapamiento".



Información dada al computador no correcta.

En ω_1 dos espectros:

$E(j\omega_1)$ --Correcto.

$E(j\omega_0)$ --Incorrecto. ($\omega_0 = \omega_1 - \omega_s$) ($\omega_0 = 1.5 - 4 = -2.5$)

No es posible distinguir entre estas dos frecuencias (ω_0 y ω_1). "ALIASING"

2.4.3. Teorema del muestreo de Shannon:

Frecuencia de muestreo mayor o igual que dos veces la frecuencia más alta de la señal de entrada.

$$\omega_s \geq 2\omega_c$$

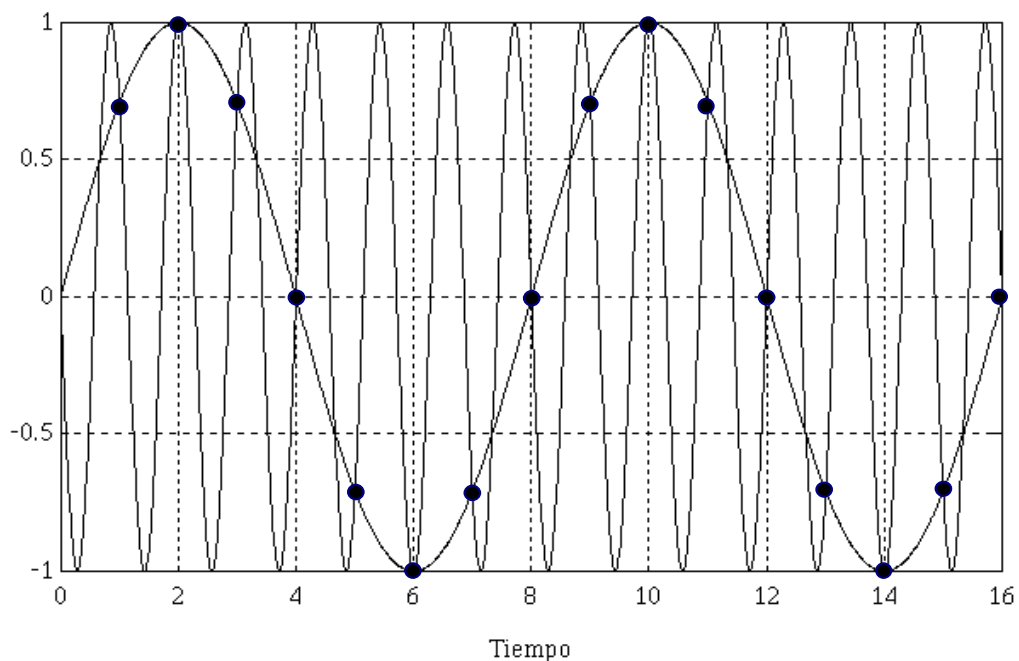
EJEMPLO 2.1

- Señal de entrada = $7/8$ de Hz.
- Frecuencia de muestreo = 1 Hz.

No cumple Shannon.
La frecuencia

$$\omega_0 = \omega_1 - \omega_s = \frac{7}{8} - 1 = -\frac{1}{8}$$

no es distinguible.

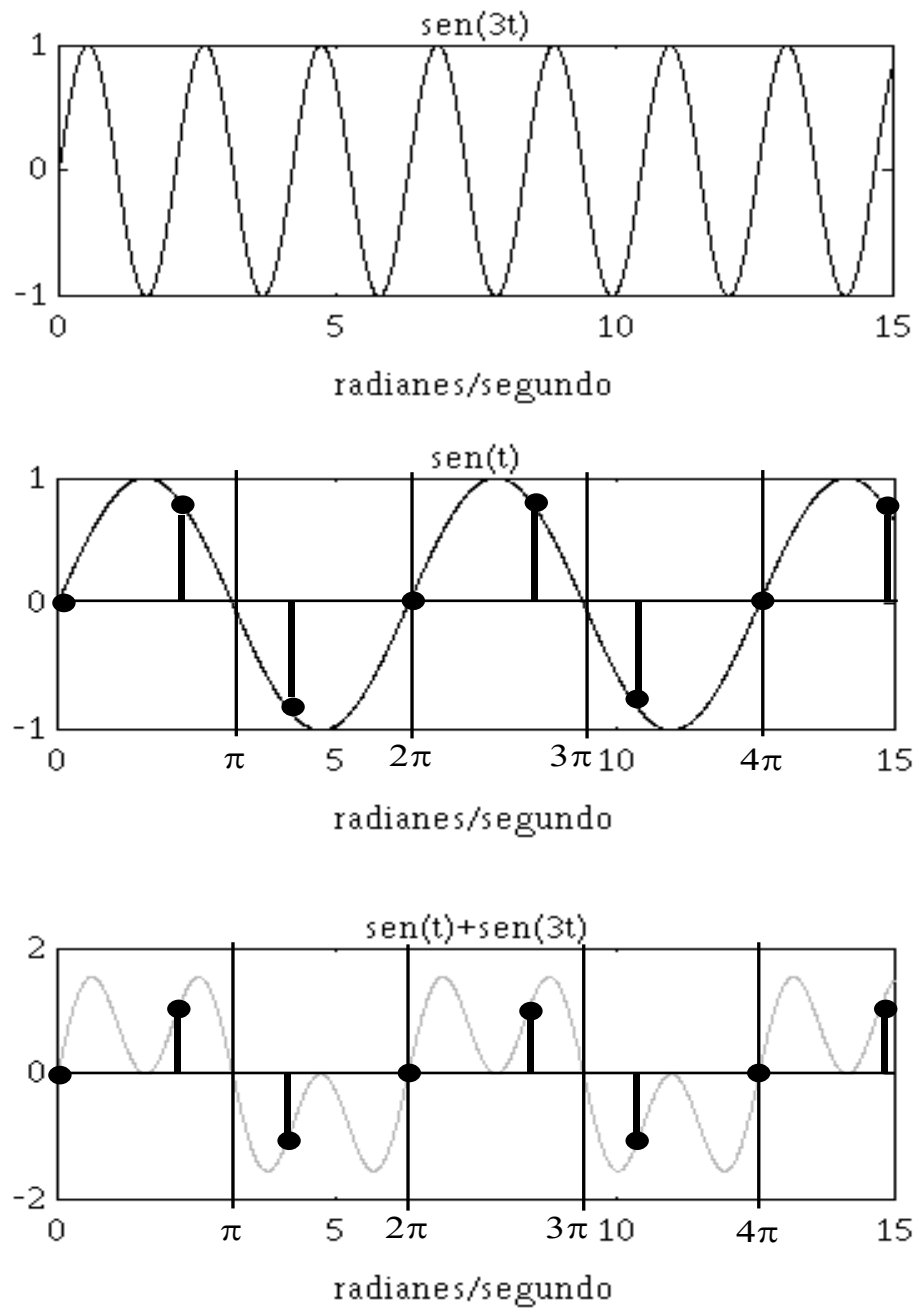


2.4.4. Oscilaciones ocultas

Si la señal continua contiene componentes de frecuencias iguales a $n \cdot \omega_s$ ($n=\text{entero}$) puede que esta componente no aparezca en la señal muestreada.

EJEMPLO 2.2

Se muestrea una señal $x(t) = \text{sen } t + \text{sen } 3t$ con una frecuencia $\omega_s = 3 \text{ rad/sg}$ ($T=2\pi/3 \text{ sg.}$)



2.4.5. Propiedades de $E^*(s)$

La señal de salida del muestreador:

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(j\omega - jk\omega_s)$$

$$E^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(s - jk\omega_s)$$

Dos siguientes propiedades:

Propiedad 1:

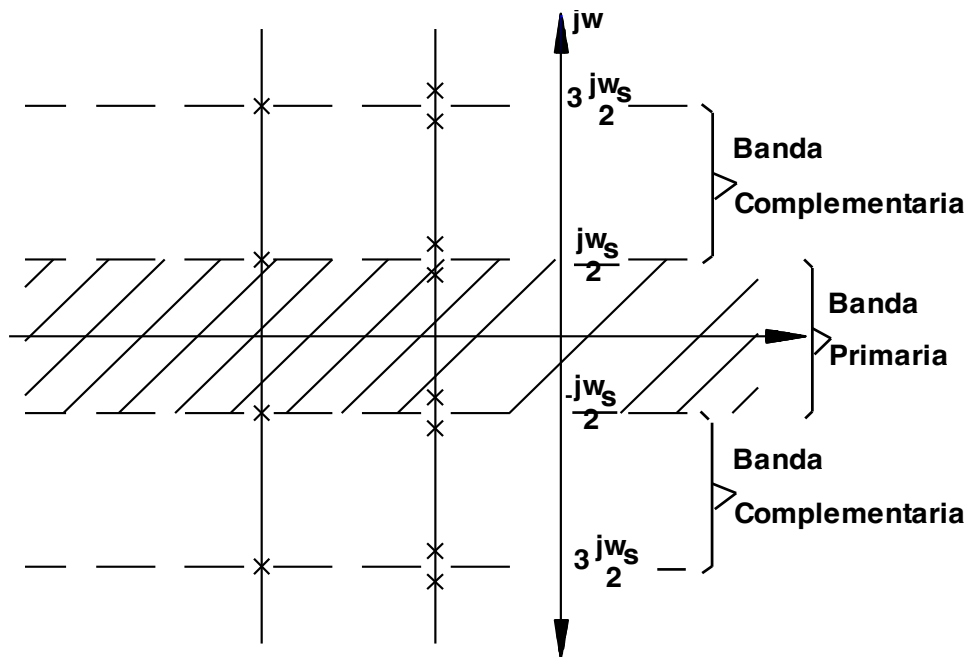
$E^*(s)$ es periódica de periodo $j\omega_s$.

Propiedad 2:

Si $E(s)$ tiene un polo en $s = s_1$, $E^*(s)$ tiene polos en $s = s_1 \pm jk\omega_s$.

$$k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$$

Si $\omega > \omega_s/2$ se obtiene la de la banda primaria.



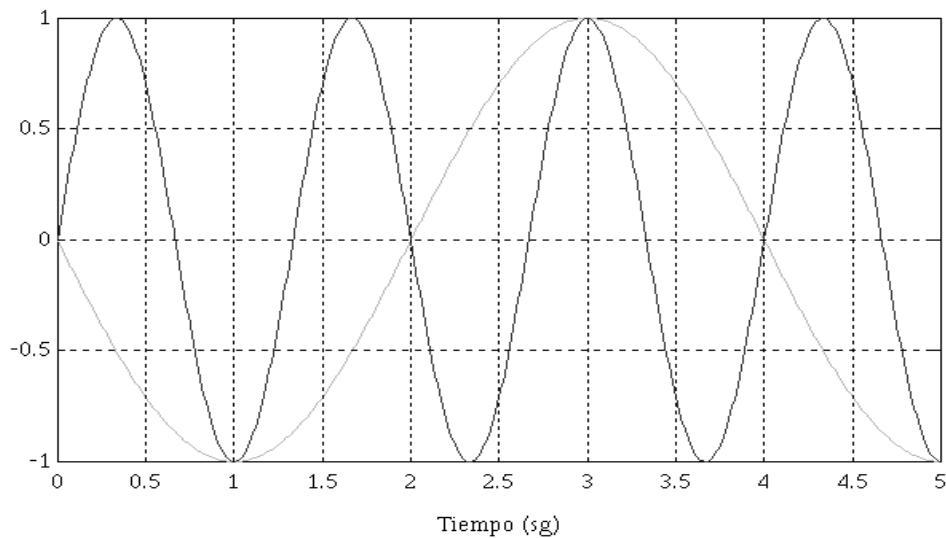
EJEMPLO 2.3

Entrada de frecuencia 1.5π rad/s y periodo de muestreo $T = 1$ sg.

$$\omega_s = 2\pi / T = 2\pi \text{ rad/sg. } \pm\omega_s/2 = \pm\pi$$

$$(1.5\pi - 2\pi = -0.5\pi).$$

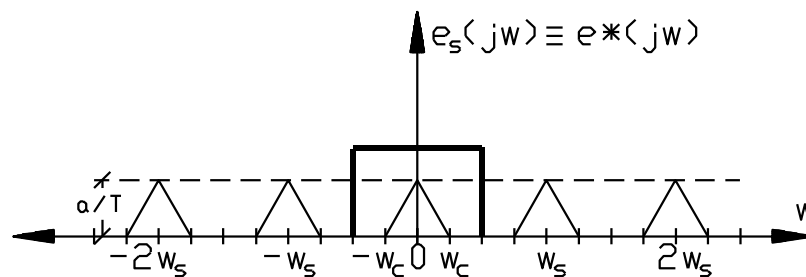
Percibirá una de frecuencia de 0.5π rad/sg.



2.5. ANÁLISIS DEL MANTENEDOR

2.5.1. Análisis del mantenedor en el tiempo

Filtro paso bajo (L): Frecuencias de corte en $\omega_s/2 = \pm\pi/T$.
Amplificación de valor T.



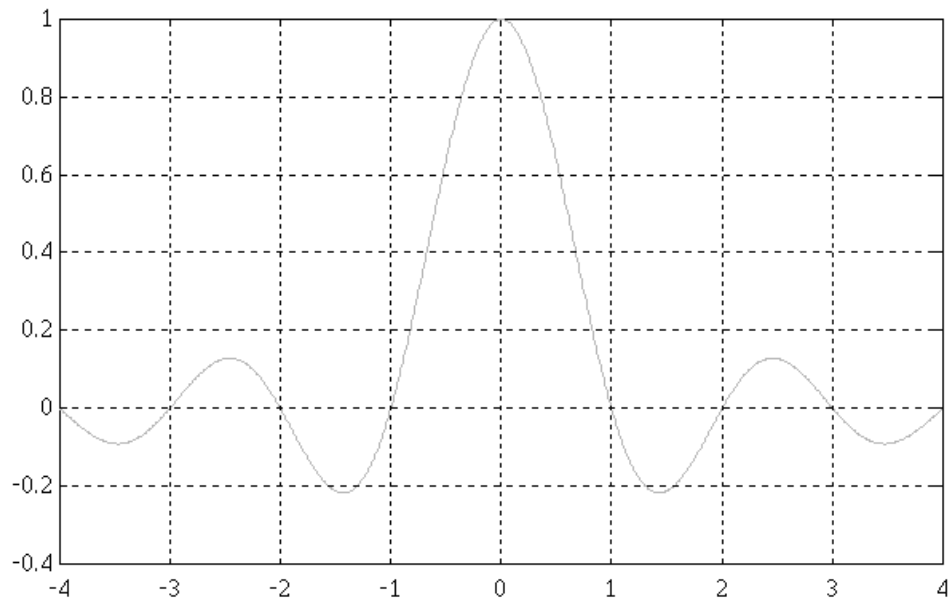
$$E(j\omega) = L(j\omega) E^*(j\omega)$$

$$e(t) = l(t) * e^*(t)$$

Respuesta impulsional del filtro:

$$l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \frac{e^{j\omega t}}{jt} \Big|_{-\pi/T}^{\pi/T} = \frac{T}{2\pi jt} (e^{j(\pi/T)t} - e^{-j(\pi/T)t})$$

$$l(t) = \frac{1}{\pi t/T} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$



Ahora es posible el cálculo de la convolución ya que se conoce:

a) La señal muestreada:

$$e^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(t) \delta(t - kT)$$

b) La respuesta impulsional del filtro paso bajo:

$$l(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

c) La formula de la convolución de dos señales continuas (Integral de Convolución).

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Entonces:

$$\begin{aligned} e(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^*(\tau) l(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(\tau) \delta(\tau - kT) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - \tau)}{T}\right) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - \tau)}{T}\right) d\tau = e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - kT)}{T}\right) \end{aligned}$$

- Muestra como construir la señal continua desde sus muestras.
- Las funciones sinc son las interpolaciones que llenan los huecos entre muestreos.

Problema: La respuesta impulsional del filtro paso bajo es no causal (no realizable físicamente).

Solución: Aproximación al filtro paso bajo ideal. El método utilizado es la extrapolación polinomial.

Serie de Taylor:

$$\bar{e}(t) = e(kT) + e'(kT)(t - kT) + \frac{e''(kT)}{2!}(t - kT)^2 + \dots$$

$\bar{e}(t)$ es la señal continua aproximada.

Las derivadas son desconocidas, pero se pueden obtener por aproximación de las diferencias anteriores:

$$e'(kT) = \frac{1}{T}(e(kT) - e((k-1)T))$$

$$e''(kT) = \frac{1}{T}(e'(kT) - e'((k-1)T))$$

.....

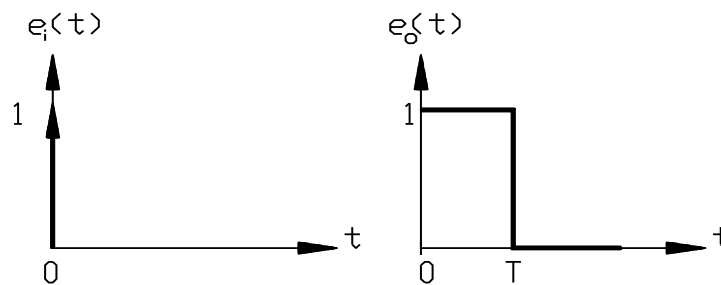
En función del número de términos serán mantenedores de orden fraccionario, de orden cero, de primer orden, etc.,...

2.5.2. Mantenedor de orden cero

Primer término de la serie de Taylor:

$$\bar{e}(t) = e(kT) \text{ para } kT \leq t < (k+1)T$$

Entre muestras la señal permanece constante al valor de la muestra anterior. La figura muestra la respuesta del mantenedor de orden cero ante una entrada impulso unidad.



Función de transferencia:

$$e_0(t) = u(t) - u(t - T)$$

Tomando transformadas de Laplace:

$$E_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$\boxed{\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}}$$

2.5.3. Análisis del mantenedor en frecuencia

$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \text{MOZ}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

Factor común al término $e^{-j\omega T/2}$ y */ por $2j$:

$$\text{MOZ}(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \left\{ \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \right\} \frac{2j}{j\omega}$$

$$\text{MOZ}(j\omega) = T e^{-j\omega T/2} \text{senc}(\omega T/2) \frac{2j}{j\omega T} = T e^{-j\omega T/2} \text{sinc}(\omega T/2)$$

Respuesta, en modulo y fase:

$$|\text{MOZ}(j\omega)| = T |\text{sinc}(\omega T/2)|$$

$$\arg(\text{MOZ}(j\omega)) = -\frac{\omega T}{2}$$

- Desfase de $\omega T/2$ (retardo de $T/2$ segundos en la respuesta temporal),.
- Modulo, señal tipo sinc. Menor a medida que crece la frecuencia, hasta hacerse nulo para $\omega = \omega_s = 2\pi/T$.

2.5.4. Mantenedor de primer orden

Dos primeros términos:

$$\bar{e}(t) = e(kT) + e'(kT)(t - kT) \quad \text{para } kT \leq t < (k+1)T$$

$$e'(kT) = \frac{1}{T} (e(kT) - e((k-1)T))$$

$(t-kT)$ es la pendiente del intervalo anterior y va multiplicada por el tiempo, a partir del instante kT .

Respuesta del mantenedor de primer orden ante una entrada impulso unidad:

