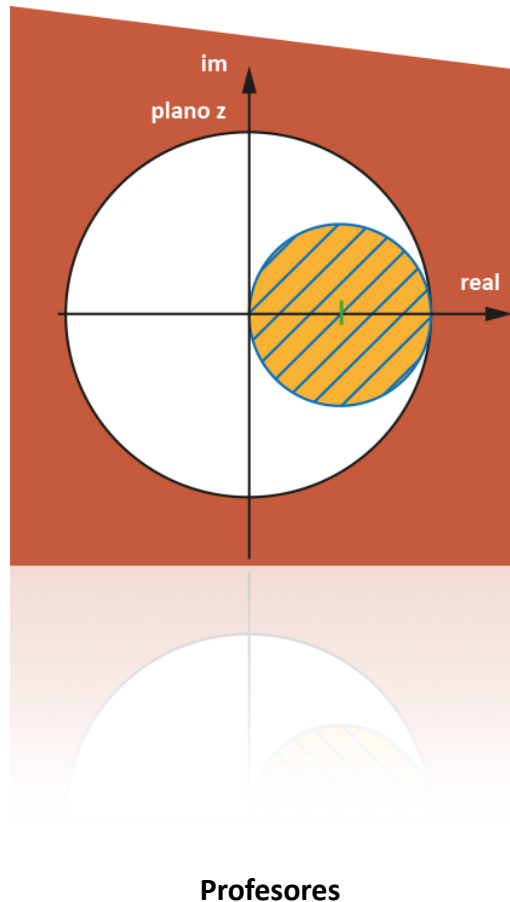


Control por computador

7. Lugar de las raíces



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

7

Lugar de las Raíces

7.1. INTRODUCCIÓN

El método del lugar de las raíces estudiado para sistemas continuos en el plano s puede ser directamente aplicado para sistemas discretos en el plano z .

La aplicación de este método sin ninguna modificación se debe a que la forma de la ecuación característica de un sistema continuo en el plano s no se diferencia de la forma de la ecuación característica de un sistema discreto en el plano z .

La única diferencia existente a la hora de dibujar el lugar de las raíces radica en el límite de estabilidad. Para los sistemas continuos este límite viene marcado por el eje imaginario y para los sistemas discretos viene marcado por la circunferencia unidad.

Los criterios del módulo y del argumento aplicados para la construcción del lugar de las raíces se indican a continuación, así como una tabla resumen de los pasos para su construcción.

7.2. CONDICION MÓDULO-ARGUMENTAL

Dos posibles formas para la ecuación característica:

$$1 + G(z)H(z) = 0 \quad ; \quad 1 + GH(z) = 0$$

Ambas se pueden poner:

$$1 + F(z) = 0$$

Luego:

$$F(z) = -1$$

$\begin{aligned}\angle F(z) &= \pm 180^\circ (2q + 1) \\ F(z) &= 1\end{aligned}$
--

Donde: $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Forma de la ecuación característica:

$$1 + K \frac{(z + z_1)(z + z_2) \dots (z + z_m)}{(z + p_1)(z + p_2) \dots (z + p_n)} = 0$$

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (z + z_i)}{\prod_{j=1}^n (z + p_j)} = 0$$

Aplicando la condición del argumento:

$$\angle(F(z)) = \angle K + \sum_{i=1}^m \angle(z + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z + p_j) = 180(2q + 1)$$

Para $K > 0$:

$$\angle(F(z)) = \sum_{i=1}^m \angle(z + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z + p_j) = 180(2q + 1)$$

Para $K < 0$:

$$\angle(F(z)) = \sum_{i=1}^m \angle(z + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z + p_j) = 2q \cdot 180$$

Condiciones de módulo y argumento:

$\begin{aligned} F(z) &= 1 \\ \angle(F(z)) &= 180(2q + 1) \quad \text{si } K > 0 \\ \angle(F(z)) &= 180(2q) \quad \text{si } K < 0\end{aligned}$

7.3. REGLAS PARA CONSTRUCCIÓN DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

1) Forma de ec. característica.	$1 + K \frac{(z + z_1)(z + z_2) \dots (z + z_m)}{(z + p_1)(z + p_2) \dots (z + p_n)} = 0$
2) Número de ramas.	Igual al número de polos de la FTLA, $F(z)$.
3) Puntos de inicio y fin.	Comienza en los polos de $F(z)$. Finaliza en los ceros de $F(z)$.
4) Lugar en eje real	Directo: si a la dcha tiene un número impar de polos y ceros. Inverso: si a la dcha tiene un número par de polos y ceros.
5) Simetría.	El lugar directo y el inverso son simétricos respecto al eje real.
6) Asíntotas.	Directo: $\theta_a = \frac{180(2q + 1)}{p - z}$ Inverso: $\theta_a = \frac{180(2q)}{p - z}$
7) Centroide:	$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de } F(z) - \sum \text{ceros de } F(z)}{p - z}$
8) Angulos de salida y llegada a los polos y ceros Complejos conjugados.	Directo: $\sum \text{Angulos de ceros} - \sum \text{Angulos de polos} = 180(2q + 1)$ Inverso: $\sum \text{Angulos de ceros} - \sum \text{Angulos de polos} = 180(2q)$
9) Llegada y salida del eje real.	<u>Método 1:</u> a) Despejar K. b) Derivar. c) Igualar a cero y ver raíces. <u>Método 2:</u> $\sum_{i=1}^m \frac{1}{a - p_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{a - z_j};$ Complejos: $\frac{2(a + \alpha)}{(a + \alpha)^2 + \beta^2}$
10) Intersección eje Imaginario	- Routh. - Ver K para filas igual a cero - Filas auxiliares ver punto.
11) Cálculo de K.	$ K = \frac{\prod_{j=1}^n (z_k + p_j) }{\prod_{i=1}^m (z_k + z_i) } = 0$ Z_k es el punto del plano Z.
12) Suma de raíces.	La suma de las raíces es constante e igual al coeficiente del término z^{n-1} , cambiado de signo, de la ecuación característica, cuando el coeficiente de z^n es la unidad