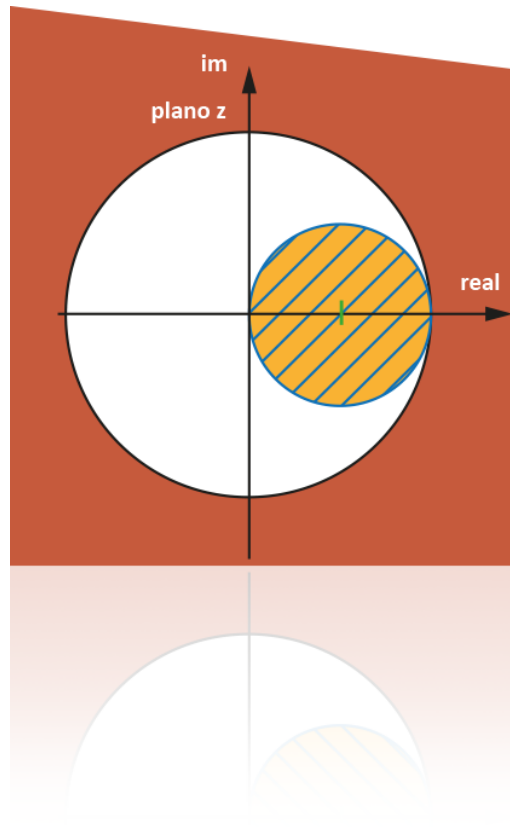


Control por computador

8. Discretización de reguladores continuos



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

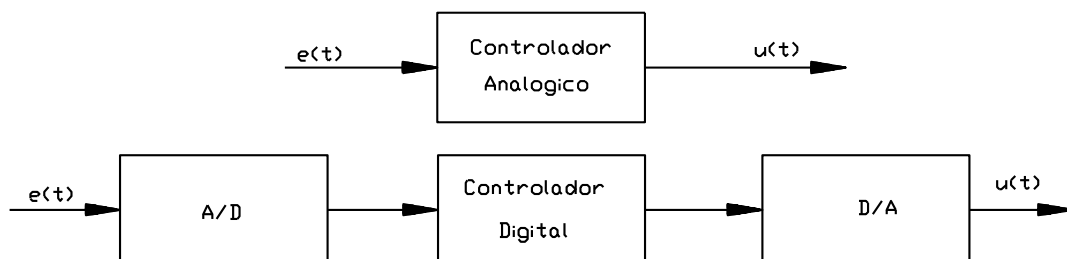
Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

8

Discretización de reguladores continuos

8.1. INTRODUCCION

Este método consiste en el diseño de controladores digitales mediante discretización de controladores continuos. Se suele denominar "Método Indirecto" porque se consigue mediante la discretización de un controlador continuo obtenido mediante cualquiera de las técnicas de diseño utilizadas para los sistemas continuos.



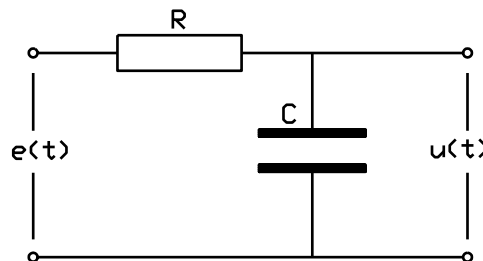
La figura muestra el controlador continuo de que partimos y el sistema discreto que realizará un control equivalente pero discreto.

Es interesante observar que para un mismo controlador continuo podemos tener diferentes controladores discretos en función del método de discretización utilizado. En este tema vamos a ver discretizaciones mediante métodos basados en la integración numérica, métodos basados en la transformada z y métodos obtenidos en función de la posición requerida de los polos en el plano s y en el plano z.

Otro aspecto de interés a destacar es el hecho de que ninguno de todos estos métodos de discretización nos va a proporcionar una fidelidad (respuesta exacta al continuo) completa y que cuanto más cerca de la frecuencia mitad de la de muestreo trabajemos, más grandes serán las diferencias entre la respuesta del sistema continuo y el discreto.

8.2. DISCRETIZACIÓN DE UN FILTRO CONTINUO

Vamos a suponer que queremos discretizar un filtro continuo tipo RC como el mostrado en la figura.



Veamos cuales son las ecuaciones que definen este filtro:

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i \, dt$$

$$e(t) = Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt$$

Si tomamos transformadas de Laplace para obtener la función de transferencia:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{a}{s + a}$$

Donde a es la constante de tiempo del sistema: $a = 1/RC$.

Normalmente, la expresión que se conocerá es la función de transferencia del filtro, y a partir de ella se podrá obtener la ecuación diferencial que define el funcionamiento del sistema:

$$\frac{d u(t)}{dt} + a u(t) = a e(t)$$

A partir de esta ecuación diferencial debemos obtener la ecuación en diferencias cuya solución sea suficientemente aproximada a la solución de la ecuación diferencial.

Para ello tenemos los siguientes métodos:

a) Métodos por Integración Numérica:

- Integración hacia Atrás (Backward).
- Integración hacia Adelante (Forward).
- Integración Trapezoidal.

b) Método de la Invarianza ante Entrada Impulso (Transformada Z).

c) Método de la Invarianza ante Entrada Escalón.

d) Método de mapeado de polos y ceros (Mapping).

A continuación vemos los diferentes métodos de discretización de filtros continuos (ver que pueden ser controladores, plantas,..) y para ello utilizaremos, como ejemplo, el filtro RC anteriormente descrito.

8.2.1. Integración hacia atrás

Recordamos la ecuación que define el filtro RC.

$$\frac{d u(t)}{dt} = -a u(t) + a e(t)$$

Integrando esta expresión en el tiempo:

$$\int_0^t \frac{d u(t)}{dt} dt = -a \int_0^t u(t) dt + a \int_0^t e(t) dt$$

Y si conocemos el valor de $u(t)$ en cada periodo de muestreo:

$$\int_0^{kT} \frac{d u(t)}{dt} dt = -a \int_0^{kT} u(t) dt + a \int_0^{kT} e(t) dt$$

Queda:

$$u(kT) - u(0) = -a \int_0^{kT} u(t) dt + a \int_0^{kT} e(t) dt$$

Para el muestreo anterior quedaría:

$$u((k-1)T) - u(0) = -a \int_0^{(k-1)T} u(t) dt + a \int_0^{(k-1)T} e(t) dt$$

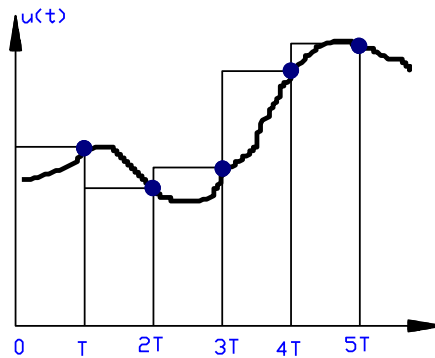
Si restamos las dos expresiones anteriores obtenemos:

$$u(kT) - u((k-1)T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

Utilizando la integración hacia atrás, las integrales:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt \quad y \quad \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

se obtienen como $u(kT)*T$ y $e(kT)*T$, respectivamente.



La figura nos muestra las áreas aproximadas obtenidas al integrar una función mediante la regla de integración discreta hacia atrás.

Integrando de esta forma, la ecuación anterior queda de la forma:

$$u(kT) - u((k-1)T) = -aTu(kT) + aTe(kT)$$

Y tomando transformadas en Z:

$$U(z)[1 + aT - z^{-1}] = E(z)[aT]$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{aT}{1 + aT - z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1 - z^{-1}}{T} + a}$$

Si comparamos esta última expresión con la función de transferencia continua del filtro RC, vemos que son idénticas, salvo en el término inferior izquierdo.

De aquí se obtiene que, para realizar la discretización de un filtro continuo mediante la integración hacia atrás, debemos realizar el cambio:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Es decir, que únicamente debemos sustituir s por este valor y ya habremos encontrado el regulador discreto equivalente.

Traducción de polos:

En este apartado vamos a ver cual es la zona en la que se situarán los polos del controlador continuo (plano s) al discretizarlos (plano z). De esta forma podemos conocer si este método nos va a producir controladores estables o no.

Nos interesa saber a que parte del plano z se traslada la parte izquierda del plano s.

A partir de la ecuación que nos indica el cambio, obtenemos:

$$\operatorname{Re}(s) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{Tz}\right) < 0$$

Escribiendo z como: $z = \sigma \pm j\omega$ podemos poner:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{(\sigma + j\omega)}\right) < 0$$

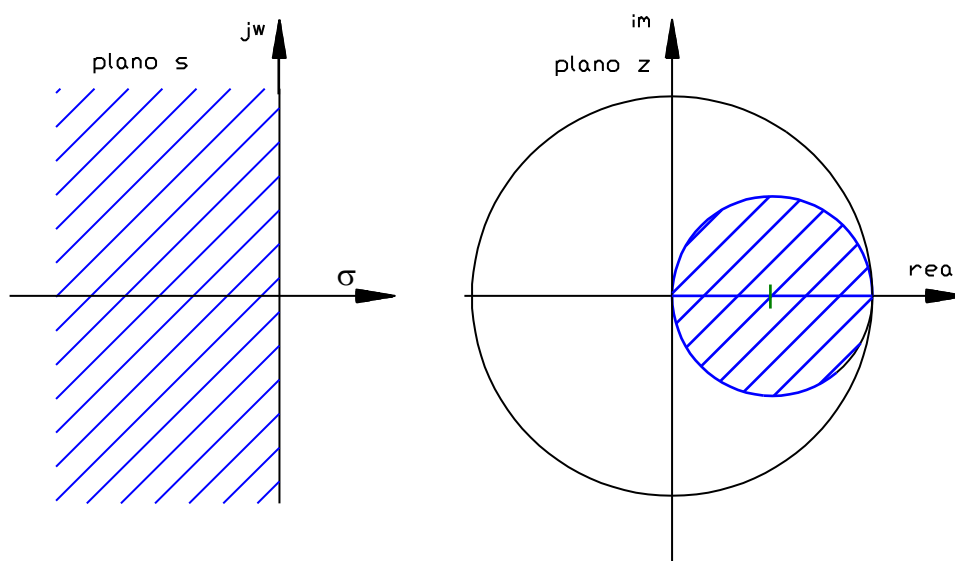
$$\operatorname{Re}\left(\frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{(\sigma + j\omega)(\sigma - j\omega)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2 + j\omega}{\sigma^2 + \omega^2}\right) = \frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

Que puede ser puesto de esta forma:

$$(\sigma - 0.5)^2 + \omega^2 < 0.5^2$$

Lo cual es un círculo de radio 0,5 con centro en el punto (0.5, 0), en el plano z.

Es decir, con este método de discretización cualquier polo que esté situado en la parte izquierda del plano s, se transformará en un polo discreto, que estará situado dentro del círculo de radio 0.5 y centro en (0.5, 0).



8.2.2. Integración hacia adelante

También aquí utilizamos el filtro RC:

$$\frac{d u(t)}{dt} = -a u(t) + a e(t)$$

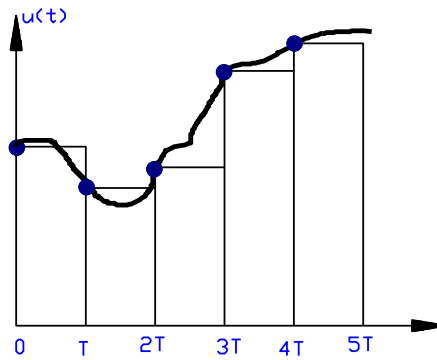
Habíamos obtenido:

$$u(kT) - u((k-1)T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

Ahora utilizando la integración hacia adelante, las integrales:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt \quad \text{y} \quad \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

se obtienen como $u((k-1)T)*T$ y $e((k-1)T)*T$, respectivamente.



La figura nos muestra las áreas aproximadas obtenidas al integrar una función mediante la regla de integración discreta hacia adelante.

Integrando de esta forma, la ecuación anterior queda de la forma:

$$u(kT) - u((k-1)T) = -aTu((k-1)T) + aTe((k-1)T)$$

Y tomando transformadas en Z:

$$U(z)[1 + aTz^{-1} - z^{-1}] = E(z)[aTz^{-1}]$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{aTz^{-1}}{1 + aTz^{-1} - z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}} + a}$$

Si comparamos esta última expresión con la función de transferencia continua del filtro RC, vemos que son idénticas, salvo en el término inferior izquierdo.

De aquí se obtiene que, para realizar la discretización de un filtro continuo mediante la integración hacia adelante, debemos realizar el cambio:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}$$

Es decir, que únicamente debemos sustituir s por este valor y ya habremos encontrado el regulador discreto equivalente.

Traducción de polos:

En este apartado vamos a ver cual es la zona en la que se situarán los polos del controlador continuo (plano s) al discretizarlos (plano z). De esta forma podemos conocer si este método nos va a producir controladores estables o no.

Nos interesa saber a que parte del plano z se traslada la parte izquierda del plano s .

A partir de la ecuación que nos indica el cambio, obtenemos:

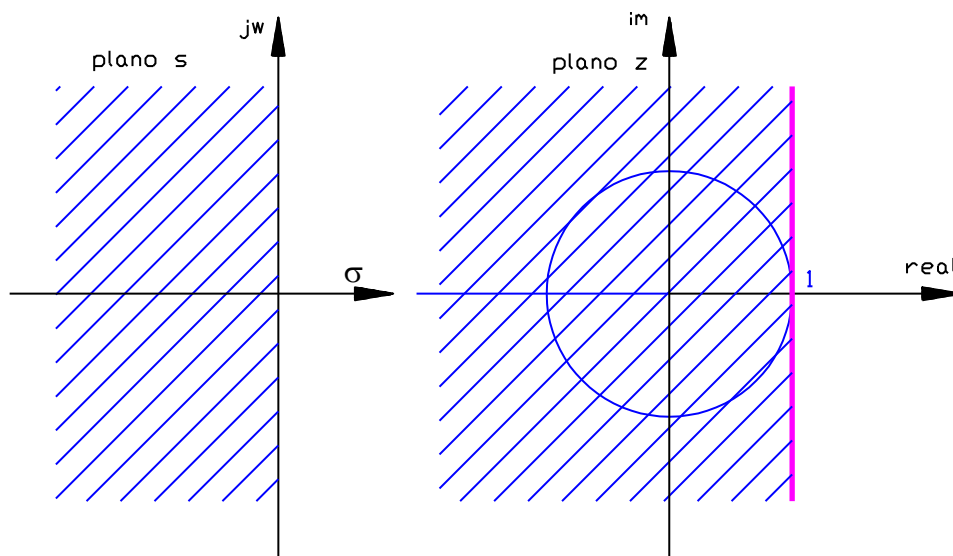
$$\operatorname{Re}(s) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z - 1}{T}\right) < 0$$

Escribiendo z como: $z = \sigma \pm j\omega$ podemos poner:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{T}\right) < 0$$

$$\sigma - 1 < 0 ; \sigma < 1$$

Lo que nos indica que la parte real de cualquier polo situado en el plano complejo s va a pasar al plano z con una parte real menor que uno o, lo que es lo mismo, estos polos estarán a la izquierda de la línea recta y paralela al eje imaginario que pasa por el punto 1.



Esto significa que al utilizar este método de integración para discretizar un sistema continuo estable (polos a la izquierda del eje imaginario) pueden aparecer polos discretos fuera del círculo unidad y, por lo tanto, un sistema discreto inestable.

8.2.3. Integración trapezoidal (Tustin)

También aquí utilizamos el filtro RC:

$$\frac{d u(t)}{dt} = -a u(t) + a e(t)$$

Habíamos obtenido:

$$u(kT) - u((k-1)T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

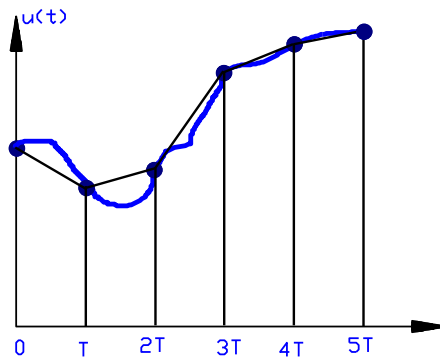
Ahora utilizando la integración trapezoidal, las integrales:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} u(t) dt \quad \text{y} \quad \int_{(k-1)T}^{kT} e(t) dt$$

se obtienen como:

$$\frac{1}{2} [u(kT) + u((k-1)T)] * T \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} [e(kT) + e((k-1)T)]$$

respectivamente.



La figura nos muestra las áreas aproximadas obtenidas al integrar una función mediante la regla de integración trapezoidal.

Integrando de esta forma, la ecuación anterior queda de la forma:

$$u(kT) - u((k-1)T) = -\frac{aT}{2} [u(kT) + u((k-1)T)] + \frac{aT}{2} [e(kT) + e((k-1)T)]$$

Y tomando transformadas en Z:

$$U(z) \left[1 + \frac{aT}{2} + \frac{aT}{2} z^{-1} - z^{-1} \right] = E(z) \left[\frac{aT}{2} + \frac{aT}{2} z^{-1} \right]$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{\frac{aT}{2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})} = \frac{a}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a}$$

Si comparamos esta última expresión con la función de transferencia continua del filtro RC, vemos que son idénticas, salvo en el término inferior izquierdo.

De aquí se obtiene que, para realizar la discretización de un filtro continuo mediante la integración hacia adelante, debemos realizar el cambio:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Es decir, que únicamente debemos sustituir s por este valor y ya habremos encontrado el regulador discreto equivalente.

Traducción de polos:

En este apartado vamos a ver cual es la zona en la que se situarán los polos del controlador continuo (plano s) al discretizarlos (plano z). De esta forma podemos conocer si este método nos va a producir controladores estables o no.

Nos interesa saber a que parte del plano z se traslada la parte izquierda del plano s . A partir de la ecuación que nos indica el cambio, obtenemos:

$$\operatorname{Re}(s) = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right) < 0$$

Escribiendo z como $z = \sigma \pm j\omega$ podemos poner:

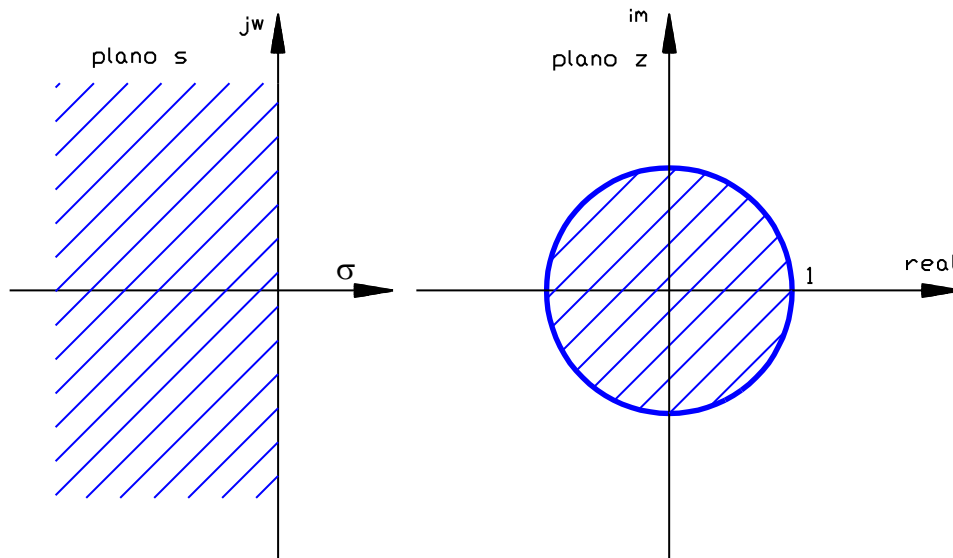
$$\operatorname{Re}\left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1}\right) < 0$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega + 1)}{(\sigma + j\omega + 1)(\sigma - j\omega + 1)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + j2\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2}\right) = \frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} < 0$$

$$\sigma^2 - 1 + \omega^2 < 0 ; \sigma^2 + \omega^2 < -1$$

Lo que nos indica que cualquier polo situado en el plano complejo s va a pasar al plano z dentro del círculo unidad.

Esto significa que cualquier sistema continuo, estable, que se discretice con este método nos da un sistema discreto estable (siempre y cuando el periodo de muestreo sea el correcto).



A este método de discretización también se le denomina "Método de la Transformación Bilineal", y esto es así porque, como vemos, nos permite pasar de un plano al otro, de forma completa.

8.2.4. Método de la invarianza ante entrada impulso

Este método también es conocido como el método de la transformada Z ya que al final se trata de realizar únicamente la transformada z de la función de transferencia del sistema continuo.

Tomando, como siempre, la función de transferencia del filtro RC como ejemplo:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

El equivalente discreto de $G(s)$, que llamaremos $G_d(z)$, obtenido por el método de la invarianza ante la entrada impulso será aquel cuya respuesta a un impulso es T veces la respuesta del sistema continuo:

$$g_d(kT) = Tg(t)|_{t=kT}$$

Entonces:

$$G_d(z) = Z[g_d(kT)] = T Z[g(t)] = T Z[G(s)] = TG(z)$$

Luego para realizar la discretización por este método únicamente debemos realizar la transformada Z de la función de transferencia del filtro continuo y multiplicar por T .

Para el ejemplo del filtro RC tendríamos:

$$G_d(z) = T * Z(G(s)) = T * Z\left(\frac{a}{s + a}\right) = T * \frac{a}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

$$G_d(z) = \frac{Ta}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

Ver que este es el método que utilizamos cuando realizamos la típica discretización del MOZ y de la planta.

8.2.5. Método de la invarianza ante entrada escalón (MOZ)

Este método es también conocido como "Discretización por Transformada Z con MOZ". Esto se debe a que se supone que existe un ficticio MOZ delante de la planta.

Como siempre tomamos el filtro RC como ejemplo:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

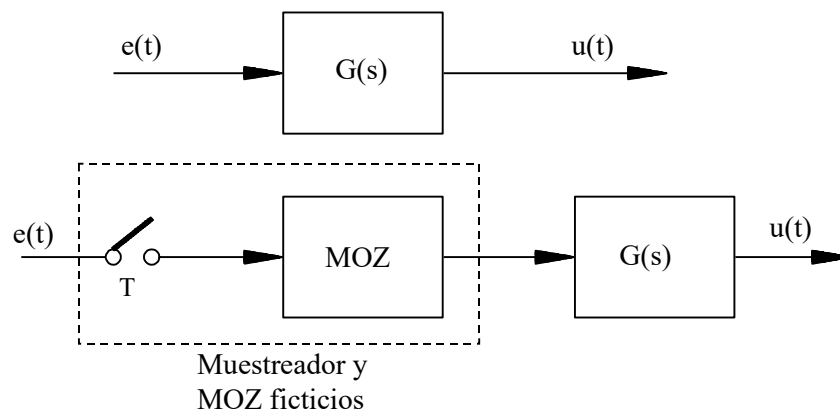
El equivalente discreto de $G(s)$, que llamaremos $G_d(z)$, obtenido por el método de la invarianza ante la entrada Escalón será aquel cuya respuesta a un escalón es la misma que la respuesta del sistema continuo en los instantes de muestreo, esto es:

$$Z^{-1} \left[G_d(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = L^{-1} \left[G(s) \frac{1}{s} \right]$$

o lo que es igual:

$$G_d(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) \right]$$

Y esta expresión última es la transformada Z de un filtro, de función de transferencia continua $G(s)$, precedido de un muestreador y de un MOZ.



En la figura podemos ver que estamos aproximando el sistema continuo por la equivalente discreta que obtendríamos al situar delante un muestreador y un MOZ. (Teóricamente, para un periodo de muestreo muy pequeño, el muestreador y el MOZ se anulan).

Decir, por último, que el filtro equivalente discreto obtenido será estable si el sistema continuo del que proviene lo es.

8.2.6. Método de mapeado de polos y ceros (Mapping)

En este método se tratan por separado el numerador y el denominador de la función de transferencia del filtro continuo, $G(s)$, y se realiza la translación de los polos y ceros, por separado, desde el plano s al plano Z .

Sabemos que la relación que liga el plano s con el plano Z es la siguiente.

$$z = e^{sT}$$

Entonces aplicaremos esta relación a cada polo o cero del sistema continuo para obtener el equivalente de este, discreto.

Por ejemplo:

- Para un cero real en $s = -b$ tendríamos un cero discreto en $z = e^{-bT}$.
- Para un cero en el infinito tendríamos un cero discreto en $z = -1$.

Notar que la respuesta en frecuencia del filtro discreto entre $0 \leq \omega \leq \omega_s / 2$ corresponde a la respuesta en frecuencia del sistema continuo entre $0 \leq \omega \leq \infty$. Por lo tanto, este método conserva la forma de la respuesta en frecuencia.

El procedimiento para realizar la translación de polos y ceros continuos al plano Z es el siguiente:

1.- Factorizar $G(s)$.

2.- Los polos de $G(s)$ serán trasladados a polos de $G(z)$ mediante la relación $z = e^{sT}$.

Por ejemplo, un polo en $s = -a$ es trasladado como $z = e^{-aT}$

3.- Los ceros finitos de $G(s)$ son trasladados a ceros de $G(z)$ mediante la relación

$$z = e^{sT}.$$

Por ejemplo, un cero en $s = -b$ es trasladado como $z = e^{-bT}$

4.- Los ceros en el infinito serán trasladados al punto $z = -1$. Entonces cada cero infinito produce, en el numerador del sistema discreto, un término $(z + 1)$. De igual forma, los polos en el infinito son trasladados al punto $z = -1$, luego cada polo en el infinito proporciona un término $(z + 1)$ en el denominador del sistema discreto.

5.- Ajustar la ganancia en estado estacionario para que sea la misma en el sistema continuo que en el discreto.

Como ejemplo vamos a discretizar el filtro RC mediante el método de translación de polos:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

Vemos que no existen ceros finitos, pero que existe un cero en el infinito (lugar de las raíces). Este cero nos proporcionará un cero discreto del tipo $(z+1)$.

Vemos que tiene un polo continuo en $s = -a$, luego tendremos un polo discreto en $z = e^{-aT}$.

Todo esto indica que el sistema discreto equivalente tendrá la forma:

$$G_d(z) = K \frac{a(z+1)}{z - e^{-aT}}$$

En esta expresión el parámetro K deberá ser ajustado para que la ganancia en estado estacionario del sistema discreto sea la misma que la del continuo para bajas frecuencias (estado estacionario).

$$G_d(1) = G(0)$$

$$K \frac{a(1+1)}{1 - e^{-aT}} = \frac{a}{0 + a}$$

Y despejando de aquí el valor de K :

$$K = \frac{1 - e^{-aT}}{2a}$$

Ver que esto es en realidad un valor numérico escalar.

8.3. TABLA RESUMEN

En este apartado agrupamos los diferentes cambios a realizar, según el método de discretización escogido, en la tabla a modo de resumen.

METODO DE DISCRETIZACIÓN	CAMBIO, ECUACION
Integración hacia atrás.	$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$
Integración hacia adelante.	$s = \frac{1 - z^{-1}}{Tz^{-1}}$
Integración trapezoidal.	$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$
Invarianza ante entrada impulso.	$G_d(z) = T * Z(G(s))$
Invarianza ante entrada escalón.	$G_d(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) \right]$
Mapeado de polos y ceros.	Finitos: $z = e^{sT}$ Infinitos: $(z+1)$