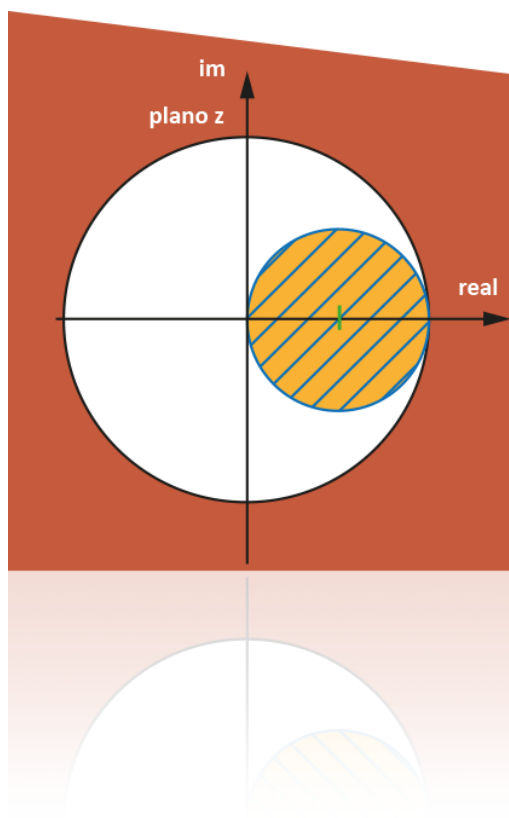


Control por computador

Ejercicios 11



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

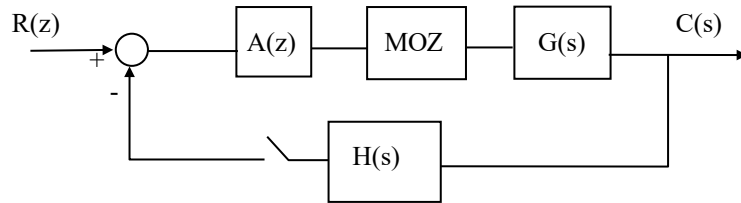
Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 11.1

Para el sistema mostrado en la figura donde:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 6.931)} \quad H(s) = 6.931 \quad A(z) = 100$$



Trazar los diagramas asintóticos de Bode (amplitud y fase) del lazo abierto. Calcular el margen de fase y de ganancia y analizar la estabilidad del sistema.

Periodo de muestreo: 0.1 segundos.

El cálculo del equivalente discreto de $GH(s)$ se puede ver en el ejercicio 4.8

$$A(z)GH(Z) = 100 \frac{0.028(z + 0.793)}{(z - 1)(z - 0.5)} = \frac{2.8(z + 0.793)}{(z - 1)(z - 0.5)}$$

Aplicando la transformación bilineal:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2} w}{1 - \frac{T}{2} w} = \frac{1 + \frac{w}{20}}{1 - \frac{w}{20}}$$

$$\begin{aligned} \text{FTLA}(w) &= \frac{2.8 \left[\frac{1 + \frac{w}{20}}{1 - \frac{w}{20}} + 0.793 \right]}{\begin{bmatrix} \frac{1 + \frac{w}{20}}{1 - \frac{w}{20}} - 1 \\ \frac{1 + \frac{w}{20}}{1 - \frac{w}{20}} - 0.5 \end{bmatrix}} = \frac{2.8 \left[1 + \frac{w}{20} + 0.793 - 0.793 \frac{w}{20} \right] \left[1 - \frac{w}{20} \right]}{\begin{bmatrix} \frac{1 + \frac{w}{20} - 1 + \frac{w}{20}}{1 - \frac{w}{20}} \\ \frac{1 + \frac{w}{20} - 0.5 + 0.5 \frac{w}{20}}{1 - \frac{w}{20}} \end{bmatrix}} = \\ &= \frac{2.8 \left[1.793 + 0.207 \frac{w}{20} \right] \left[1 - \frac{w}{20} \right]}{2 \frac{w}{20} \left[0.5 + 1.5 \frac{w}{20} \right]} = \frac{2.8(35.86 + 0.207w)(20 - w)}{2w(10 + 1.5w)} \\ &\boxed{\text{FTLA}(w) = \frac{0.193(173.237 + w)(20 - w)}{w(6.667 + w)}} \end{aligned}$$

$$FTLA(j\omega) = \frac{0.193(173.237 + j\omega)(20 - j\omega)}{j\omega(6.667 + j\omega)} = \frac{0.193 \cdot 173.237 \cdot 20 \left(1 + \frac{j\omega}{173.237}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{20}\right)}{6.667 j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{6.667}\right)}$$

$$FTLA(j\omega) = \frac{100.299 \left(1 + \frac{j\omega}{173.237}\right) \left(1 - \frac{j\omega}{20}\right)}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{6.667}\right)}$$

Frecuencias de corte: 6.667, 20 y 173.237

Para el diagrama de módulo las pendientes serán:

Término	1/j ω	(1+j ω /6.667) ⁻¹	1-j ω /20	1+j ω /173.237	Pendiente acum.
(0,6.667]	-20	0	0	0	-20
[6.667,20]	-20	-20	0	0	-40
[20,173.237]	-20	-20	+20	0	-20
[173.237,∞]	-20	-20	+20	+20	0

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(\omega = 0.1 \text{ rad/seg}) = 20(\log 100.29 - \log 0.1) = 60.02 \text{ dB}$$

$$A(\omega = 6.667 \text{ rad/seg}) = 60.02 - 20 \log \frac{6.667}{0.1} = 23.541 \text{ dB}$$

$$A(\omega = 20 \text{ rad/seg}) = 23.541 - 40 \log \frac{20}{6.667} = 4.457 \text{ dB}$$

$$A(\omega = 173.2 \text{ rad/seg}) = 4.457 - 20 \log \frac{173.2}{20} = -14.293 \text{ dB}$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica:

$$4.457 = 20 \log \frac{\omega_a}{20} \quad \omega_a = 20 \cdot 10^{\frac{4.457}{20}} = 33.41 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_a = 33.41 \text{ rad/seg}$$

Para el diagrama de fase las pendientes serán:

Término:	$1/jv$	$(1+jv/6.667)^{-1}$	$1-jv/20$	$1+jv/173.237$	Pendiente acum.
$(0, 0.6667]$	0	0	0	0	0
$[0.6667, 2]$	0	-45	0	0	-45
$[2, 17.3237]$	0	-45	-45	0	-90
$[17.3237, 66.67]$	0	-45	-45	+45	-45
$[66.67, 200]$	0	0	-45	+45	0
$[200, 1732.37]$	0	0	0	+45	+45
$[1732.37, \infty]$	0	0	0	0	0

Nota: El sistema es de fase no mínima, para la fase el cero $1-jv/20$ se comporta como un polo.

Fases en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(v \leq 0.667 \text{ rad/seg}) = -90^\circ$$

$$\varphi(v = 2 \text{ rad/seg}) = -90^\circ - 45 \log \frac{2}{0.667} = -111.469^\circ$$

$$\varphi(v = 17.323 \text{ rad/seg}) = -111.469^\circ - 90 \log \frac{17.3237}{2} = -195.854^\circ$$

$$\varphi(v = 66.67 \text{ rad/seg}) = -195.854^\circ - 45 \log \frac{66.67}{17.3237} = -222.19^\circ$$

$$\varphi(v = 200 \text{ rad/seg}) = -222.19^\circ$$

$$\varphi(v \geq 1732 \text{ rad/seg}) = -222.19^\circ + 45 \log \frac{1732}{200} = -180^\circ$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de fase crítica:

$$180^\circ - 111.469^\circ = 90 \log \frac{v_f}{2} \quad v_f = 2 \cdot 10^{\frac{68.531}{90}} = 11.547 \text{ rad/seg}$$

$$v_f = 11.547 \text{ rad/seg}$$

Cálculo del margen de fase MF y margen de ganancia MG:

$$\begin{aligned} \text{MF} &= \varphi(v = v_a) + 180^\circ = \left[\varphi(v = 17.3 \text{ rad/seg}) - 45 \log \frac{v_a}{17.3} \right] + 180^\circ = \\ &= \left[-195.854^\circ - 45 \log \frac{33.41}{17.3} \right] + 180^\circ = -208.69^\circ + 180^\circ \end{aligned}$$

$$\text{MF} = -28.69$$

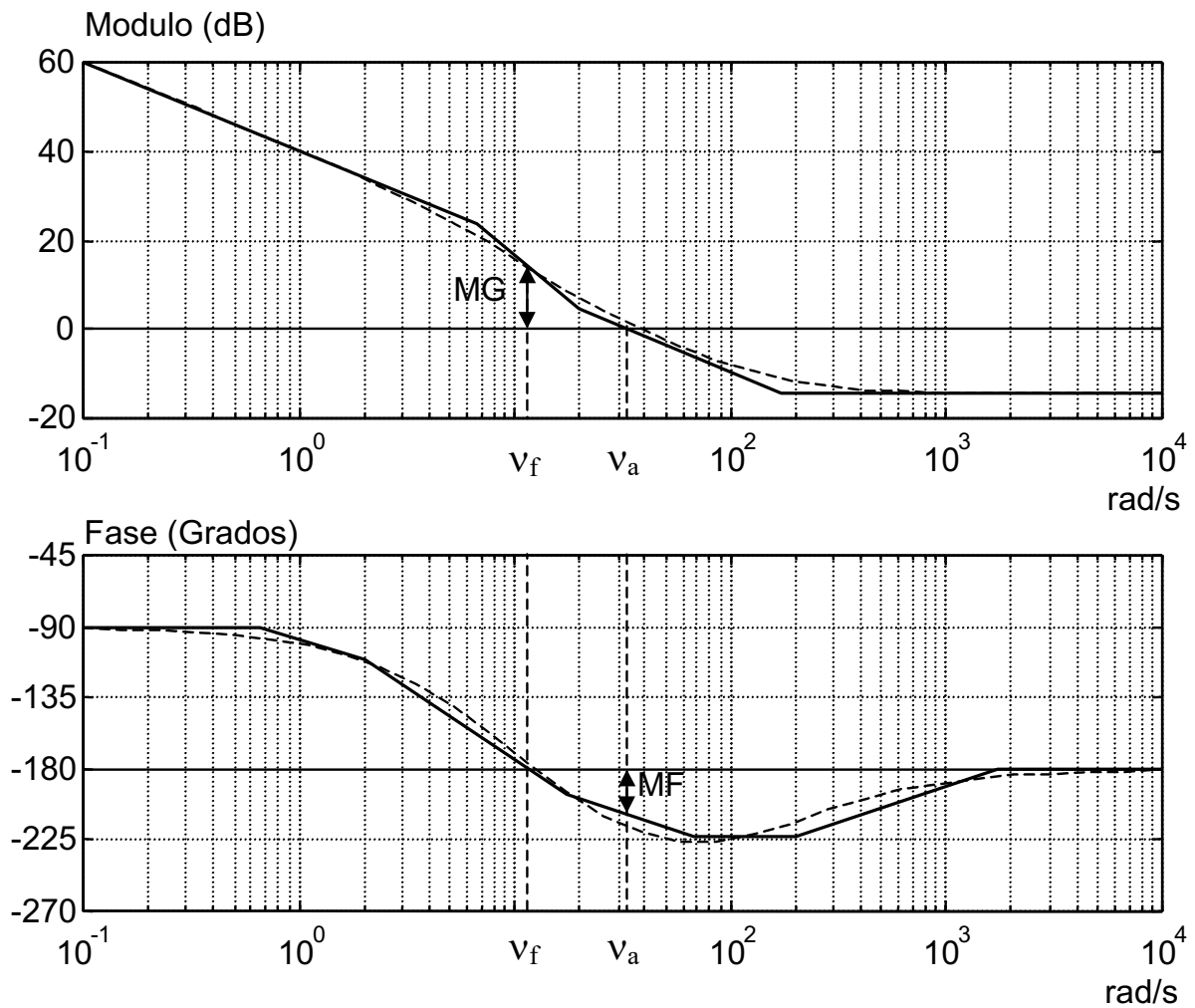
$$\text{MG} = A(v = v_f) = A(v = 6.667 \text{ rad/seg}) - 40 \log \frac{v_f}{6.667} = 23.541 - 40 \log \frac{11.547}{6.667}$$

$$\text{MG} = 14 \text{ dB}$$

Estabilidad del sistema de lazo cerrado:

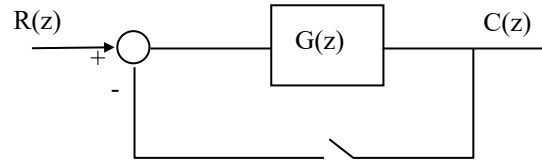
El sistema es inestable: el margen de ganancia está por encima de 0dB y el margen de fase está por debajo de los -180° , es decir, $v_a > v_f$.

La figura muestra la representación de los diagramas de Bode asintóticos en línea continua y la correspondiente a los diagramas de Bode reales en línea discontinua.



EJERCICIO 11.2

Dibujar los diagramas de Bode asintóticos de amplitud y fase para el lazo abierto del sistema. Calcular los márgenes de amplitud y fase y analizar la estabilidad del sistema completo. Periodo de muestreo 2 segundos.



$$G(z) = \frac{10(2z+1)(z+1)^3}{(z-1)(3z+1)(2z^2+z+1)}$$

Aplicando la transformación bilineal:

$$G(z) = \frac{10(2z+1)(z+1)^3}{(z-1)(3z+1)(2z^2+z+1)}$$

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1+w}{1-w}$$

$$\begin{aligned} G(w) &= \frac{10 \left[2 \frac{1+w}{1-w} + 1 \right] \left[\frac{1+w}{1-w} + 1 \right]^3}{\left[\frac{1+w}{1-w} - 1 \right] \left[3 \frac{1+w}{1-w} + 1 \right] \left[2 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 + \frac{1+w}{1-w} + 1 \right]} = \\ &= \frac{10 \left[\frac{2+2w+1-w}{1-w} \right] \left[\frac{1+w+1-w}{1-w} \right]^3}{\left[\frac{1+w-1+w}{1-w} \right] \left[\frac{3+3w+1-w}{1-w} \right] \left[\frac{2(1+2w+w^2) + (1-w^2) + (1-w)^2}{(1-w)^2} \right]} = \\ &= \frac{10 \left[\frac{w+3}{1-w} \right] \left[\frac{2}{1-w} \right]^3}{\left[\frac{2w}{1-w} \right] \left[\frac{2w+4}{1-w} \right] \left[\frac{2+4w+2w^2+1-w^2+1-2w+w^2}{(1-w)^2} \right]} \\ &= \boxed{G(w) = \frac{10(w+3)}{w(w+2)(w^2+w+2)}} \end{aligned}$$

Sustituyendo w por jv:

$$G(jv) = \frac{10(jv+3)}{jv(jv+2)((jv)^2+jv+2)} = \frac{10 \cdot 3 \left(\frac{jv}{3} + 1 \right)}{jv \cdot 2 \left(\frac{jv}{2} + 1 \right) \cdot 2 \left(\left(\frac{jv}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{jv}{2} + 1 \right)}$$

$$G(jv) = \frac{7.5 \left(\frac{jv}{3} + 1 \right)}{jv \left(\frac{jv}{2} + 1 \right) \left(\left(\frac{jv}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{jv}{2} + 1 \right)}$$

Frecuencias de corte: $\sqrt{2}$, 2 y 3

Para el diagrama de módulo las pendientes serán:

Término	$1/jv$	$(1+jv/2)^{-1}$	$[1+(jv/2)+(jv/\sqrt{2})^2]^{-1}$	$1+jv/3$	Pendiente acum.
$(0, \sqrt{2}]$	-20	0	0	0	-20
$[\sqrt{2}, 2]$	-20	0	-40	0	-60
$[2, 3]$	-20	-20	-40	0	-80
$[3, \infty]$	-20	-20	-40	+20	-60

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(v = 0.1 \text{ rad/seg}) = 20(\log 7.5 - \log 0.1) = 37.50 \text{ dB}$$

$$A(v = \sqrt{2} \text{ rad/seg}) = 37.50 - 20 \log \frac{\sqrt{2}}{0.1} = 14.49 \text{ dB}$$

$$A(v = 2 \text{ rad/seg}) = 14.49 - 60 \log \frac{2}{\sqrt{2}} = 5.46 \text{ dB}$$

$$A(v = 3 \text{ rad/seg}) = 5.46 - 80 \log \frac{3}{2} = -8.63 \text{ dB}$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica:

$$5.46 = 80 \log \frac{v_a}{2} \quad v_a = 2 \cdot 10^{\frac{5.46}{80}}$$

$$v_a = 2.34 \text{ rad/seg}$$

Para el diagrama de fase las pendientes serán:

Término:	$1/jv$	$(1+jv/2)^{-1}$	$[1+(jv/2)+(jv/\sqrt{2})^2]^{-1}$	$1+jv/3$	Pendiente acum.
$(0, \sqrt{2}/10]$	0	0	0	0	0
$[\sqrt{2}/10, 0.2]$	0	0	-90	0	-90
$[0.2, 0.3]$	0	-45	-90	0	-135
$[0.3, 10\sqrt{2}]$	0	-45	-90	+45	-90
$[10\sqrt{2}, 20]$	0	-45	0	+45	0
$[20, 30]$	0	0	0	+45	+45
$[30, \infty]$	0	0	0	0	0

Fases en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(v \leq \frac{\sqrt{2}}{10} \text{ rad/seg}) = -90^\circ$$

$$\varphi(v = 0.2 \text{ rad/seg}) = -90^\circ - 90 \log \frac{0.2}{\frac{\sqrt{2}}{10}} = -103.55^\circ$$

$$\varphi(v = 0.3 \text{ rad/seg}) = -103.55^\circ - 135 \log \frac{0.3}{0.2} = -127.32^\circ$$

$$\varphi(v = 10\sqrt{2} \text{ rad/seg}) = -127.32^\circ - 90 \log \frac{10\sqrt{2}}{0.3} = -277.93^\circ$$

$$\varphi(v = 20 \text{ rad/seg}) = -277.93^\circ$$

$$\varphi(v = 30 \text{ rad/seg}) = -277.93^\circ + 45 \log \frac{30}{20} = -270^\circ$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de fase crítica:

$$180^\circ - 127.32^\circ = 90 \log \frac{v_f}{0.3} \quad v_f = 0.3 \cdot 10^{\frac{52.68}{90}}$$

$$v_f = 1.155 \text{ rad/seg}$$

Cálculo del margen de fase MF y margen de ganancia MG:

$$MF = \varphi(v = v_a) + 180^\circ = \left[\varphi(v = 0.3 \text{ rad/seg}) - 90 \log \frac{v_a}{0.3} \right] + 180^\circ =$$

$$= \left[-127.32^\circ - 90 \log \frac{2.34}{0.3} \right] + 180^\circ = -207.61^\circ + 180^\circ$$

$$\boxed{MF = -27.61^\circ}$$

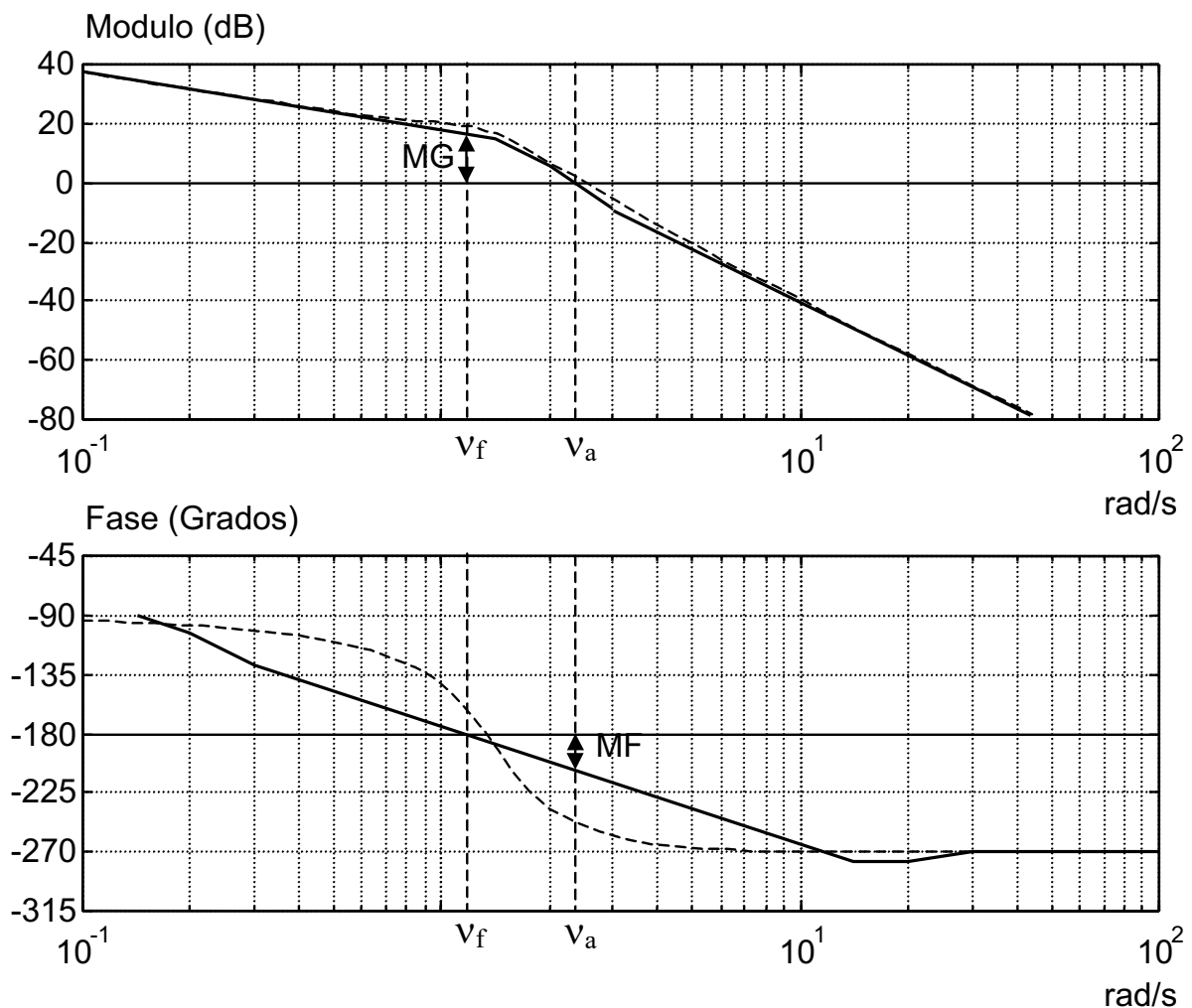
$$MG = A(v = v_f) = A(v = 0.1 \text{ rad/seg}) - 20 \log \frac{v_f}{0.1} = 37.50 - 20 \log \frac{1.155}{0.1}$$

$$\boxed{MG = 16.25 \text{ dB}}$$

Estabilidad del sistema de lazo cerrado:

El sistema es inestable: el margen de ganancia está por encima de 0dB y el margen de fase está por debajo de los -180° , es decir, $v_a > v_f$.

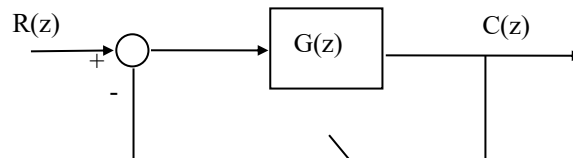
La figura muestra la representación de los diagramas de Bode asintóticos en línea continua y la correspondiente a los diagramas de Bode reales en línea discontinua.



EJERCICIO 11.3

Dibujar los diagramas de Bode asintóticos de amplitud y fase para el lazo abierto del sistema. Calcular los márgenes de amplitud y fase y analizar la estabilidad del sistema completo. Si se añade un amplificador de ganancia K para llevar al sistema al límite de estabilidad, calcular la frecuencia crítica de oscilación del sistema. Periodo de muestreo 1 segundo.

$$G(z) = \frac{0.368(z + 0.7174)}{(z - 1)(z - 0.368)}$$



Aplicando la transformación bilineal:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + \frac{w}{2}}{1 - \frac{w}{2}}$$

$$G(w) = \frac{0.368 \left(\frac{1 + \frac{w}{2}}{1 - \frac{w}{2}} + 0.7174 \right)}{\left(\frac{1 + \frac{w}{2}}{1 - \frac{w}{2}} \right)^2 - 1.368 \left(\frac{1 + \frac{w}{2}}{1 - \frac{w}{2}} \right) + 0.368} = \frac{\frac{0.368 \left(1 + \frac{w}{2} \right) + 0.264 \left(1 - \frac{w}{2} \right)}{\left(1 - \frac{w}{2} \right)}}{\frac{\left(1 + \frac{w}{2} \right)^2 - 1.368 \left(1 - \frac{w^2}{4} \right) + 0.368 \left(1 - \frac{w}{2} \right)^2}{\left(1 - \frac{w}{2} \right)^2}} =$$

$$= \frac{\left[0.368 \left(1 + \frac{w}{2} \right) + 0.264 \left(1 - \frac{w}{2} \right) \right] \left(1 - \frac{w}{2} \right)}{1 + 2 \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4} - 1.368 + 1.368 \frac{w^2}{4} + 0.368 - 0.368 \cdot 2 \frac{w}{2} + 0.368 \frac{w^2}{4}} =$$

$$= \frac{[0.632 + 0.052w] \left(1 - \frac{w}{2} \right)}{w(1 - 0.368w) + w^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1.368}{4} + \frac{0.368}{4} \right)} = \frac{0.052(w + 12.1538) \left(\frac{2 - w}{2} \right)}{0.632w + \frac{2.7360}{4}w^2} =$$

$$= \frac{-0.026(w + 12.1538)(w - 2)}{0.684w(w + 0.924)} = \frac{-0.038(w + 12.1538)(w - 2)}{w(w + 0.924)} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{w}{12.154}\right)\left(1 - \frac{w}{2}\right)}{w\left(1 + \frac{w}{0.924}\right)} = \frac{(1 + 0.082w)(1 - 0.5w)}{w(1 + 1.082w)}$$

$$G(jv) = \frac{\left(1 + \frac{jv}{12.154}\right)\left(1 - \frac{jv}{2}\right)}{jv\left(1 + \frac{jv}{0.924}\right)}$$

Frecuencias de corte: 0.924, 2 y 12.154

Para el diagrama de módulo las pendientes serán:

Término	1/jv	(1+jv/0.924) ⁻¹	(1-jv/2)	(1+jv/12.154)	Pendiente acum.
(0, 0.924]	-20	0	0	0	-20
[0.924, 2]	-20	-20	0	0	-40
[2, 12.154]	-20	-20	+20	0	-20
[12.154, ∞]	-20	-20	+20	+20	0

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(v = 0.01 \text{ rad/seg}) = 20(\log 1 - \log 0.01) = 40 \text{ dB}$$

$$A(v = 0.924 \text{ rad/seg}) = 40 - 20 \log \frac{0.924}{0.01} = 0.6866 \text{ dB}$$

$$A(v = 2 \text{ rad/seg}) = 0.6866 - 40 \log \frac{2}{0.924} = -12.7277 \text{ dB}$$

$$A(v = 12.154 \text{ rad/seg}) = -12.7277 - 20 \log \frac{12.154}{2} = -28.4015 \text{ dB}$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica:

$$0.6866 = 40 \log \frac{v_a}{0.924} \quad v_a = 0.924 \cdot 10^{\frac{0.6866}{40}}$$

$$v_a = 0.9613 \text{ rad/seg}$$

Para el diagrama de fase las pendientes serán:

Término	$1/jv$	$(1+jv/0.924)^{-1}$	$(1-jv/2)$	$(1+jv/12.154)$	Pendiente acum.
$(0, 0.0924]$	0	0	0	0	0
$[0.0924, 0.2]$	0	-45	0	0	-45
$[0.2, 1.2154]$	0	-45	-45	0	-90
$[1.2154, 9.24]$	0	-45	-45	+45	-45
$[9.24, 20]$	0	0	-45	+45	0
$[20, 121.54]$	0	0	0	+45	+45
$[121.54, \infty)$	0	0	0	0	0

Nota: El sistema es de fase no mínima, para la fase el cero $1-jv/2$ se comporta como un polo.

Fases en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(v \leq 0.0924 \text{ rad/seg}) = -90^\circ$$

$$\varphi(v = 0.2 \text{ rad/seg}) = -90^\circ - 45 \log \frac{0.2}{0.0924} = -105.0911^\circ$$

$$\varphi(v = 1.2154 \text{ rad/seg}) = -105.0911^\circ - 90 \log \frac{1.2154}{0.2} = -175.6231^\circ$$

$$\varphi(v = 9.24 \text{ rad/seg}) = -175.6231 - 45 \log \frac{9.24}{1.2154} = -215.266^\circ$$

$$\varphi(v = 20 \text{ rad/seg}) = -215.266^\circ$$

$$\varphi(v \geq 121.54 \text{ rad/seg}) = -215.266 + 45 \log \frac{121.54}{20} = -180^\circ$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de fase crítica:

$$180^\circ - 175.6231^\circ = 45 \log \frac{v_f}{1.2154} \quad v_f = 1.2154 \cdot 10^{\frac{4.3769}{45}}$$

$$v_f = 1.5205 \text{ rad/seg}$$

Cálculo del margen de fase MF y margen de ganancia MG:

$$MF = \varphi(v = v_a) + 180^\circ = \left[\varphi(v = 0.2 \text{ rad/seg}) - 90 \log \frac{v_a}{0.2} \right] + 180^\circ =$$

$$= \left[-105.0911^\circ - 90 \log \frac{0.9613}{0.2} \right] + 180^\circ = -166.4557^\circ + 180^\circ$$

$$\boxed{MF = 13.5443^\circ}$$

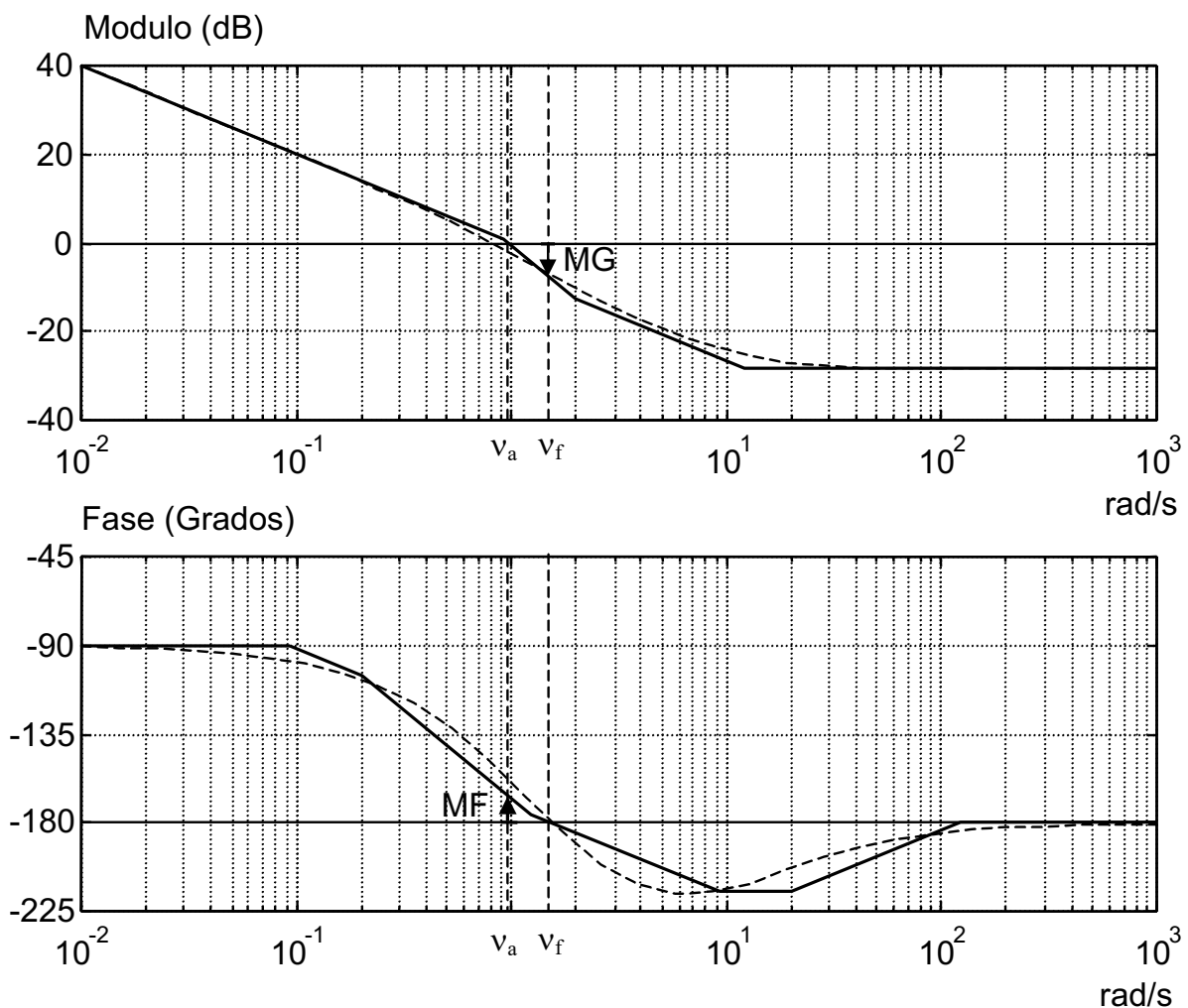
$$MG = A(v = v_f) = A(v = 0.924 \text{ rad/seg}) - 20 \log \frac{v_f}{0.924} = 0.6866 - 40 \log \frac{1.5205}{0.924}$$

$$\boxed{MG = -7.966 \text{ dB}}$$

Estabilidad del sistema de lazo cerrado:

El sistema es estable: el margen de ganancia está por debajo de 0dB y el margen de fase está por encima de los -180° , es decir, $v_a < v_f$.

La figura muestra la representación de los diagramas de Bode asintóticos en línea continua y la correspondiente a los diagramas de Bode reales en línea discontinua.



Cálculo de la frecuencia crítica de oscilación del sistema:

Añadiendo una ganancia K desplazamos la posición de la curva de módulo hasta hacerla pasar por 0dB para la frecuencia ν_f .

El sistema se hace oscilante por tanto para $\nu = 1.5205 \text{ rad/s}$.

Como $\nu = \frac{2}{T} \text{tg} \frac{\omega T}{2}$, y $T=1$ segundo, se obtiene la frecuencia real:

$$\nu = 2 \text{tg} \frac{\omega}{2} = 1.5205 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 2 \arctg \frac{\nu}{2} = 1.3001 \text{ rad/s}$$

Este valor corresponde al calculado mediante los diagramas asintóticos.

La frecuencia real diferirá en algo de este valor. Una forma de calcular el valor real de dicha frecuencia puede hacerse calculando el valor de la ganancia necesaria para llevar al límite de estabilidad al sistema, y de ahí obtener la frecuencia de oscilación de la posición de los polos resultantes.

$$1 + KG(w) = 0$$

$$1 + K \frac{-0.038(w + 12.154)(w - 2)}{w(w + 0.924)} = 0$$

$$w(w + 0.924) - 0.038K(w + 12.154)(w - 2) = 0$$

$$w^2 + 0.924w - K(0.038w^2 + 0.3859w - 0.9237) = 0$$

$$(1 - 0.038K)w^2 + (0.924 - 0.3859K)w + 0.9237K = 0$$

Tabla de Routh:

w^2	$1 - 0.038K$	$0.9237K$
w^1	$0.924 - 0.3859K$	0
w^0	$0.9237K$	

a) $0.924 - 0.3859K > 0$ $K < 2.3944$

b) $0.9237K > 0$ $K > 0$

Como

$$\boxed{0 < K < 2.3944}$$

el límite de estabilidad será para $K=2.3944$, es decir, el sistema se comportará de forma oscilante.

La frecuencia de oscilación se obtiene de la situación de los polos de lazo cerrado para esa ganancia. Construyendo la ecuación auxiliar y sustituyendo el valor de K se obtiene:

$$(1 - 0.038K)w^2 + 0.9237K = 0$$

$$0.9090w^2 + 2.2117 = 0$$

$$w = \sqrt{\frac{-2.2117}{0.9090}} = j1.5598 = jv$$

$$v = 1.5598 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2}{T} \arctg \frac{vT}{2} = 2 \arctg \frac{1.5598}{2}$$

$$\omega = 1.3248 \text{ rad/s}$$

EJERCICIO 11.4

Se pretende realizar un sistema de control por computador para el posicionamiento de una antena de televisión vía satélite. Para ello se ha seleccionado la correspondiente antena parabólica, un motor de corriente continua, unos engranes y una base que permite la rotación de la antena. La función de transferencia de todo este conjunto (motor, engranes, base giratoria y antena) se ha estimado como $G(s)$. Así mismo se ha incorporado un sensor de posición digital, formado por un encoder, cuya función de transferencia viene dada por $H(z)$. Por último se ha adquirido un amplificador de potencia, de ganancia 7, para alimentar al motor.

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{20}{s(s+6)} \quad H(z) = \frac{V_o(z)}{\theta(z)} = 1$$

Siendo:

$\theta(s)$: ángulo girado por la antena

$V(s)$: tensión de entrada al motor

$V_o(s)$: dato a la salida del encoder

La señal de referencia se pretende dar por teclado desde el computador.

Periodo de muestreo 0.05 segundos.

Dibujar la respuesta frecuencial (BODE) del sistema discreto equivalente y calcular el margen de fase del sistema.

Ver ejercicio 5.7 para cálculo del equivalente discreto de $G(s)$.

$$G(z) = 0.0227 \frac{z + 0.9068}{(z - 1)(z - 0.7408)}$$

La función de transferencia en cadena abierta del sistema será:

$$K \cdot G(z) \cdot H(z) = 7 \cdot 0.0227 \frac{z + 0.9068}{(z - 1)(z - 0.7408)}$$

Aplicando la transformación bilineal:

$$z = \frac{1 + 0.025w}{1 - 0.025w}$$

$$\begin{aligned} GH(w) &= 7 \cdot 0.0227 \frac{\frac{1 + 0.025w}{1 - 0.025w} + 0.9068}{\left(\frac{1 + 0.025w}{1 - 0.025w} - 1\right)\left(\frac{1 + 0.025w}{1 - 0.025w} - 0.7408\right)} = \\ &= 0.1589 \frac{1 + 0.025w + 0.9068 - 0.0227w}{\left(\frac{1 + 0.025w - 1 + 0.025w}{1 - 0.025w}\right)\left(\frac{1 + 0.025w - 0.7408 + 0.0185w}{1 - 0.025w}\right)} = \\ &= 0.1589 \frac{0.0023w + 1.9068}{\left(\frac{0.05w}{1 - 0.025w}\right)\left(\frac{0.0435w + 0.2592}{1 - 0.025w}\right)} = \\ &= \frac{0.1589(0.0023w + 1.9068)(1 - 0.025w)}{0.05w(0.0435w + 0.2592)} = \frac{0.1589 \cdot 0.0023 \cdot 0.025(829.0434 + w)(40 - w)}{0.05 \cdot 0.0435 \cdot w(5.9586 + w)} \\ GH(w) &= \frac{0.0042(829.0434 + w)(40 - w)}{w(5.9586 + w)} \end{aligned}$$

Sustituyendo w por jv:

$$\begin{aligned} GH(jv) &= \frac{0.0042(829.0434 + jv)(40 - jv)}{jv(5.9586 + jv)} = \frac{0.0042 \cdot 829.0434 \cdot 40 \left(1 + \frac{jv}{829.0434}\right) \left(1 - \frac{jv}{40}\right)}{5.9586 \cdot jv \left(1 + \frac{jv}{5.9586}\right)} \\ GH(jv) &= \frac{23.3745 \left(1 + \frac{jv}{829.0434}\right) \left(1 - \frac{jv}{40}\right)}{jv \left(1 + \frac{jv}{5.9586}\right)} \end{aligned}$$

Frecuencias de corte: 5.9586, 40 y 829.0434

Para el diagrama de módulo las pendientes serán:

Término	$1/jv$	$(1+jv/5.9586)^{-1}$	$1-jv/40$	$1+jv/829.0434$	Pendiente acum.
$(0, 5.9586]$	-20	0	0	0	-20
$[5.9586, 40]$	-20	-20	0	0	-40
$[40, 829.0434]$	-20	-20	+20	0	-20
$[829.0434, \infty]$	-20	-20	+20	+20	0

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(v = 1 \text{ rad/seg}) = 20 \log 23.3745 = 27.3748 \text{ dB}$$

$$A(v = 5.9586 \text{ rad/seg}) = 27.3748 - 20 \log \frac{5.9586}{1} = 11.8719 \text{ dB}$$

$$A(v = 40 \text{ rad/seg}) = 11.8719 - 40 \log \frac{40}{5.9586} = -21.2047 \text{ dB}$$

$$A(v = 829.0434 \text{ rad/seg}) = -21.2047 - 20 \log \frac{829.0434}{40} = -47.535 \text{ dB}$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica:

$$11.8719 = 40 \log \frac{v_a}{5.9586} \quad v_a = 5.9586 \cdot 10^{\frac{11.8719}{40}}$$

$$v_a = 11.8016 \text{ rad/seg}$$

Para el diagrama de fase las pendientes serán:

Término:	$1/jv$	$(1+jv/5.9586)^{-1}$	$1-jv/40$	$1+jv/829.04$	Pendiente acum.
$(0, 0.5958]$	0	0	0	0	0
$[0.5958, 4]$	0	-45	0	0	-45
$[4, 59.586]$	0	-45	-45	0	-90
$[59.586, 82.9043]$	0	0	-45	0	-45
$[82.9043, 400]$	0	0	-45	+45	0
$[400, 8290.434]$	0	0	0	+45	+45
$[8290.434, \infty)$	0	0	0	0	0

Nota: El sistema es de fase no mínima, para la fase el cero $1-jv/40$ se comporta como un polo.

Fases en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(v \leq 0.5958 \text{ rad/seg}) = -90^\circ$$

$$\varphi(v = 4 \text{ rad/seg}) = -90^\circ - 45 \log \frac{4}{0.5958} = -127.2132^\circ$$

$$\varphi(v = 59.586 \text{ rad/seg}) = -127.2132^\circ - 90 \log \frac{59.586}{4} = -232.7908^\circ$$

$$\varphi(v = 82.9043 \text{ rad/seg}) = -232.7908^\circ - 45 \log \frac{82.9043}{59.586} = -239.2453^\circ$$

$$\varphi(v = 400 \text{ rad/seg}) = -239.2453^\circ$$

$$\varphi(v = 8290.434 \text{ rad/seg}) = -239.2453^\circ + 45 \log \frac{8290.434}{400} = -180^\circ$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de fase crítica:

$$180^\circ - 127.2132^\circ = 90 \log \frac{v_f}{4} \quad v_f = 4 \cdot 10^{\frac{52.7868}{90}}$$

$$\boxed{v_f = 15.4376 \text{ rad/seg}}$$

Cálculo del margen de fase MF y margen de ganancia MG:

$$MF = \varphi(v = v_a) + 180^\circ = \left[\varphi(v = 4 \text{ rad/seg}) - 90 \log \frac{v_a}{4} \right] + 180^\circ =$$

$$= \left[-127.2132^\circ - 90 \log \frac{11.8016}{4} \right] + 180^\circ = -169.5025^\circ + 180^\circ$$

$$\boxed{MF = 10.4975^\circ}$$

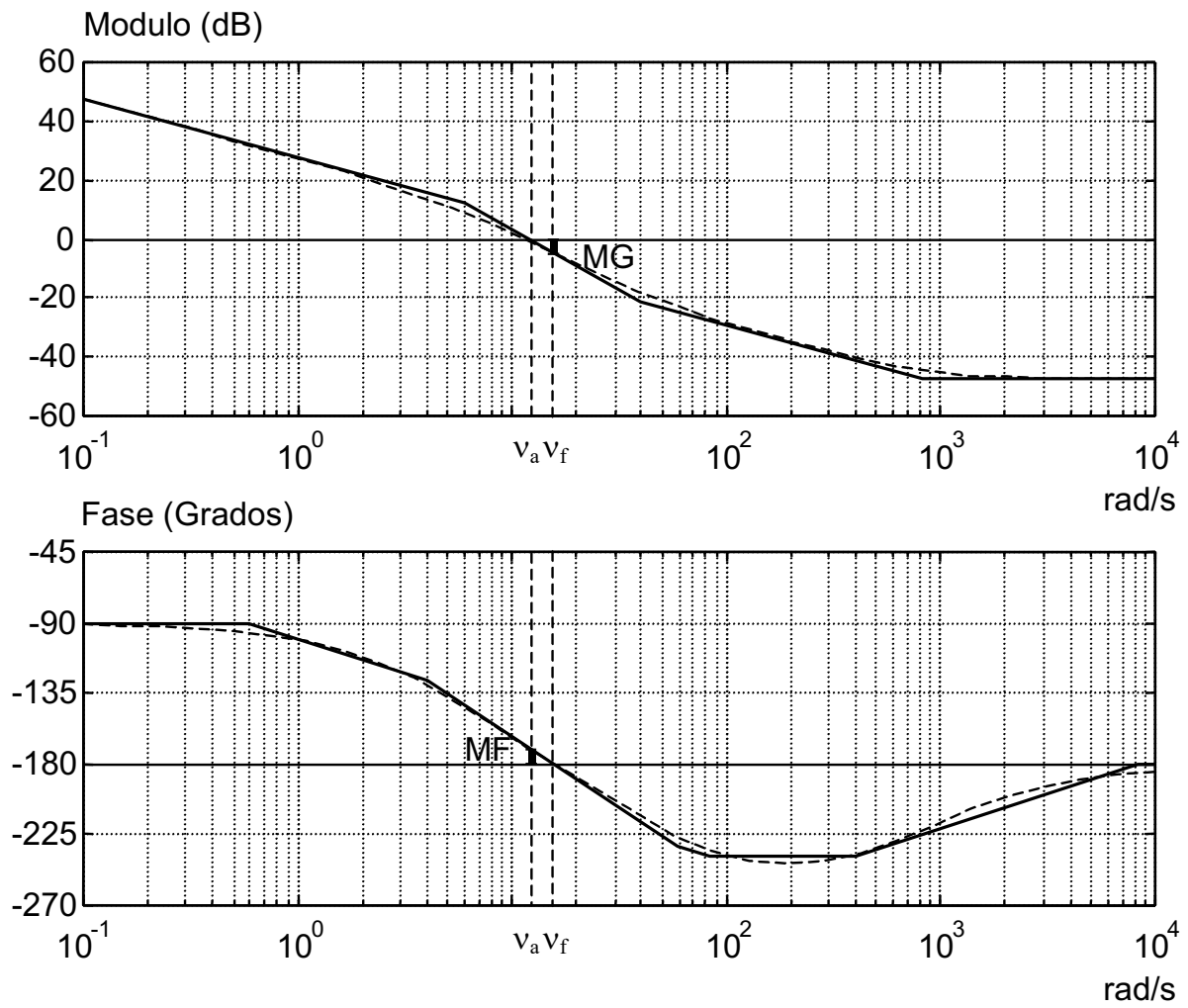
$$MG = A(v = v_f) = A(v = 5.9586 \text{ rad/seg}) - 40 \log \frac{v_f}{5.9586} = 11.8719 - 40 \log \frac{15.4376}{5.9586}$$

$$\boxed{MG = -4.6655 \text{ dB}}$$

Estabilidad del sistema de lazo cerrado:

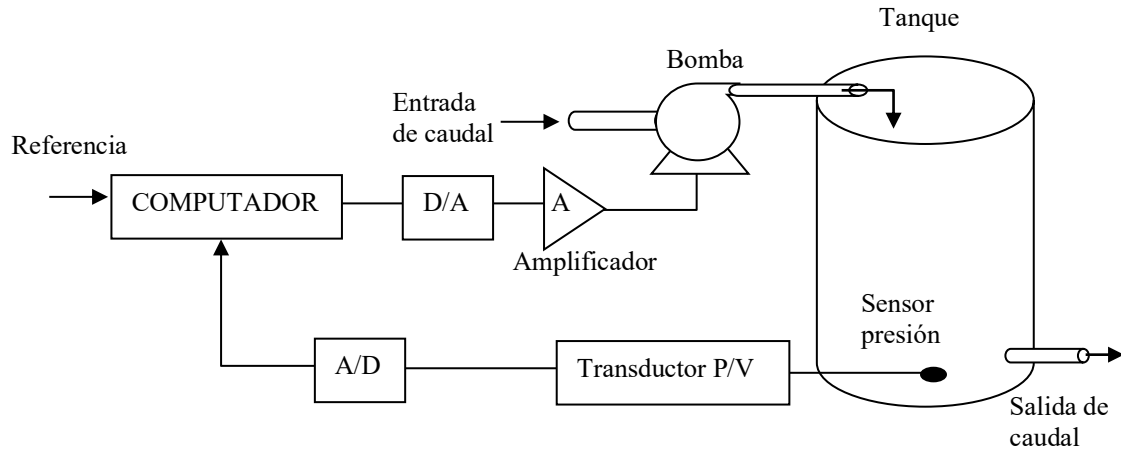
El sistema de lazo cerrado es estable: el margen de ganancia está por debajo de 0dB y el margen de fase está por encima de los -180° , es decir, $v_a < v_f$.

La figura muestra la representación de los diagramas de Bode asintóticos en línea continua y la correspondiente a los diagramas de Bode reales en línea discontinua.



EJERCICIO 11.5

Para el sistema mostrado en la figura:



Amplificador: $A=10$

Bomba y tanque: $G(s) = \frac{10}{s^2 + 1.6s + 1}$

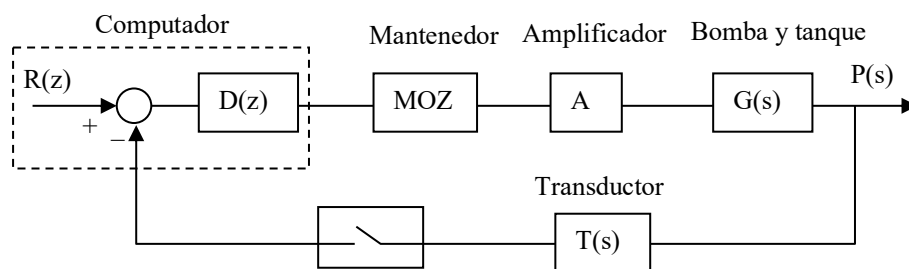
Transductor: $T(s) = 0.1$

Dibujar el diagrama de bloques del sistema sabiendo que el computador realiza la comparación e implementa el regulador.

Dibujar la respuesta frecuencial del sistema e indicar las condiciones de estabilidad del sistema.

Periodo de muestreo: 0.1 segundos.

La figura muestra el diagrama de bloques del sistema controlado por computador:



Se calcula el equivalente discreto de la función de transferencia $G(s)$:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = 10 \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1.6s + 1)} \right]$$

$$R_1 = s \frac{1}{s(s^2 + 1.6s + 1)} \frac{1}{1 - e^{0.1s} z^{-1}} \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s^2 + 1.6s + 1)} \frac{1}{1 - e^{0.1s} z^{-1}} \Big|_{s=0} = \frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
 R_2 &= (s - (-0.8 + j0.6)) \frac{1}{s(s - (-0.8 + j0.6))(s - (-0.8 - j0.6))} \frac{1}{1 - e^{0.1s} z^{-1}} \Big|_{s=-0.8+j0.6} = \\
 &= \frac{1}{s(s - (-0.8 - j0.6))} \frac{1}{1 - e^{0.1s} z^{-1}} \Big|_{s=-0.8+j0.6} = \\
 &= \frac{1}{(-0.8 + j0.6)(-0.8 + j0.6 - (-0.8 - j0.6))} \frac{1}{1 - e^{0.1(-0.8+j0.6)} z^{-1}} = \\
 &= \frac{1}{(-0.8 + j0.6)1.2j} \frac{1}{1 - e^{0.1(-0.8+j0.6)} z^{-1}} = \frac{(-0.8 - j0.6)(-j)}{(-0.8 + j0.6)(-0.8 - j0.6)1.2j(-j)} \frac{1}{1 - e^{(-0.08+j0.06)} z^{-1}} = \\
 &= \frac{(-0.8 - j0.6)(-j)}{1.2} \frac{1}{1 - e^{-0.08}(\cos 0.06 + j \sin 0.06) z^{-1}} = \frac{-0.6 + 0.8j}{1.2} \frac{z}{z - 0.9215 - j0.05535}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_3 &= (s - (-0.8 - j0.6)) \frac{1}{s(s - (-0.8 + j0.6))(s - (-0.8 - j0.6))} \frac{1}{1 - e^{0.1s} z^{-1}} \Big|_{s=-0.8-j0.6} = \\
 &= \frac{1}{s(s - (-0.8 + j0.6))} \frac{1}{1 - e^{0.1s} z^{-1}} \Big|_{s=-0.8-j0.6} = \\
 &= \frac{1}{(-0.8 - j0.6)(-0.8 - j0.6 - (-0.8 + j0.6))} \frac{1}{1 - e^{0.1(-0.8-j0.6)} z^{-1}} = \\
 &= \frac{1}{(-0.8 - j0.6)(-1.2j)} \frac{1}{1 - e^{0.1(-0.8-j0.6)} z^{-1}} = \\
 &= \frac{(-0.8 + j0.6)(j)}{(-0.8 - j0.6)(-0.8 + j0.6)(-1.2j)(j)} \frac{1}{1 - e^{(-0.08-j0.06)} z^{-1}} = \\
 &= \frac{(-0.8 + j0.6)(j)}{1.2} \frac{1}{1 - e^{-0.08}(\cos 0.06 - j \sin 0.06) z^{-1}} = \frac{-0.6 - 0.8j}{1.2} \frac{z}{z - 0.9215 + j0.05535}
 \end{aligned}$$

Como puede observarse los residuos en polos complejos conjugados, son también conjugados entre sí. Por tanto, con realizar el cálculo de uno de ellos es suficiente para conocer el valor del conjugado.

$$\begin{aligned}
 R_2 + R_3 &= \frac{-0.6 + 0.8j}{1.2} \frac{z}{z - 0.9215 - j0.05535} + \frac{-0.6 - 0.8j}{1.2} \frac{z}{z - 0.9215 + j0.05535} = \\
 &= \frac{z}{1.2} \cdot \frac{(-0.6 + 0.8j)(z - 0.9215 + j0.05535) + (-0.6 - 0.8j)(z - 0.9215 - j0.05535)}{(z - 0.9215 - j0.05535)(z - 0.9215 + j0.05535)}
 \end{aligned}$$

Como se va a sumar dos residuos complejos conjugados, representaremos los valores de los complejos mediante valores simbólicos para simplificar los cálculos, de esta forma se tendrá:

$$R_2 + R_3 = \frac{z}{1.2} \frac{(a + jb)(c + jd) + (a - jb)(c - jd)}{(e - jf)(e + jf)}$$

$$(a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc - bd$$

$$(a - jb)(c - jd) = ac - jad - jbc - bd$$

$$(a + jb)(c + jd) + (a - jb)(c - jd) = 2ac - 2bd$$

$$R_2 + R_3 = \frac{z}{1.2} \frac{2ac - 2bd}{e^2 + f^2}$$

donde:

$$a = -0.6$$

$$b = 0.8$$

$$c = z - 0.9215$$

$$d = 0.05535$$

$$e = z - 0.9215$$

$$f = 0.05535$$

$$R_2 + R_3 = \frac{z}{1.2} \frac{2 \cdot (-0.6)(z - 0.9215) - 2 \cdot 0.8 \cdot 0.05535}{(z - 0.9215)^2 + 0.05535^2} = \frac{z}{1.2} \frac{-1.2z + 1.1058 - 0.08856}{z^2 - 1.843z + 0.8492 + 0.0031}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{z}{1.2} \frac{-1.2z + 1.01724}{z^2 - 1.843z + 0.8523}$$

$$G(z) = 10 \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} + \frac{z}{1.2} \cdot \frac{-1.2z + 1.01724}{z^2 - 1.843z + 0.8523} \right] =$$

$$= 10(z-1) \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{-1.2z + 1.01724}{z^2 - 1.843z + 0.8523} \right] =$$

$$= 10(z-1) \left[\frac{1.2z^2 - 2.2116z + 1.02276 - 1.2z^2 + 1.01724z + 1.2z - 1.01724}{1.2(z-1)(z^2 - 1.843z + 0.8523)} \right] =$$

$$= \frac{10}{1.2} \frac{0.00564z + 0.00552}{z^2 - 1.843z + 0.8523} = \frac{0.047z + 0.046}{z^2 - 1.843z + 0.8523}$$

$$G(z) = 0.047 \frac{z + 0.9787}{z^2 - 1.843z + 0.8523}$$

La función de transferencia de lazo abierto, al ser la realimentación de valor constante, será:

$$A \cdot GH(z) = 10 \cdot 0.047 \frac{z + 0.9787}{z^2 - 1.843z + 0.8523} \cdot 0.1$$

$$G(z) = 0.047 \frac{z + 0.9787}{z^2 - 1.843z + 0.8523}$$

que coincide con la función de transferencia $G(z)$.

Aplicando la transformación bilineal:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w}$$

$$\begin{aligned} G(w) &= 0.047 \frac{\left(\frac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w}\right) + 0.9787}{\left(\frac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w}\right)^2 - 1.843\left(\frac{1 + 0.05w}{1 - 0.05w}\right) + 0.8523} = \\ &= 0.047 \frac{[1 + 0.05w + 0.9787(1 - 0.05w)](1 - 0.05w)}{(1 + 0.05w)^2 - 1.843(1 + 0.05w)(1 - 0.05w) + 0.8523(1 - 0.05w)^2} = \\ &= 0.047 \frac{(1.9787 + 0.001065w)(1 - 0.05w)}{1 + 0.0025w^2 + 0.1w - 1.843(1 - 0.0025w^2) + 0.8523(1 + 0.0025w^2 - 0.1w)} = \\ &= 0.047 \frac{1.9787 - 0.09894w + 0.001065w - 0.00005325w^2}{1 + 0.0025w^2 + 0.1w - 1.843 + 0.004608w^2 + 0.8523 + 0.002131w^2 - 0.08523w} = \\ &= 0.047 \frac{-0.00005325w^2 - 0.09788w + 1.9787}{0.009239w^2 + 0.01477w + 0.0093} = \\ &= \frac{0.047 \cdot (-0.00005325)(w - 19.9980)(w + 1858.1201)}{0.009239(w^2 + 1.5987w + 1.006602)} \\ &G(w) = \frac{-0.0002709 \cdot (w - 19.9980)(w + 1858.1201)}{w^2 + 1.5987w + 1.006602} \end{aligned}$$

Sustituyendo w por $j\omega$ para hacer el análisis frecuencial:

$$G'(jv) = \frac{-0.0002709 \cdot (jv - 19.9980)(jv + 1858.1201)}{(jv)^2 + 1.5987jv + 1.006602}$$

$$G'(jv) = \frac{-0.0002709 \cdot (-19.9980) \cdot 1858.1201 \cdot \left(1 - \frac{jv}{19.9980}\right) \left(1 + \frac{jv}{1858.1201}\right)}{1.006602 \left(\frac{(jv)^2}{1.006602} + \frac{1.5987jv}{1.006602} + 1 \right)}$$

$$G(jv) = \frac{10.0003 \cdot \left(1 - \frac{jv}{19.9980}\right) \left(1 + \frac{jv}{1858.1201}\right)}{1 + 1.5882jv + \left(\frac{jv}{1.003296}\right)^2}$$

$$G(jv) \approx \frac{10 \cdot \left(1 - \frac{jv}{20}\right) \left(1 + \frac{jv}{1858}\right)}{1 + 1.5882jv + \left(\frac{jv}{1}\right)^2}$$

Frecuencias de corte: 1, 20 y 1858

Para el diagrama de módulo las pendientes serán:

Término	$(1 + 1.5882jv + (jv)^2)^{-1}$	$1 - jv/20$	$1 + jv/1858$	Pendiente acum.
$(0, 1]$	0	0	0	0
$[1, 20]$	-40	0	0	-40
$[20, 1858]$	-40	+20	0	-20
$[1858, \infty)$	-40	+20	+20	0

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(v \leq 1 \text{ rad/seg}) = 20 \log 10 = 20 \text{ dB}$$

$$A(v = 20 \text{ rad/seg}) = 20 - 40 \log \frac{20}{1} = 20 - 52.04 = -32.04 \text{ dB}$$

$$A(v \geq 1858 \text{ rad/seg}) = -32.04 - 20 \log \frac{1858}{20} = -32.04 - 39.36 = -71.4 \text{ dB}$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica:

$$20 = 40 \log \frac{v_a}{1} \quad v_a = 10^{\frac{20}{40}}$$

$$v_a 3.16 \text{ rad/seg}$$

Para el diagrama de fase las pendientes serán:

Término	$(1+1.5882jv+(jv)^2)^{-1}$	$1-jv/20$	$1+jv/1858$	Pendiente acum.
$(0, 0.1]$	0	0	0	0
$[0.1, 2]$	-90	0	0	-90
$[2, 10]$	-90	-45	0	-135
$[10, 185.8]$	0	-45	0	-45
$[185.8, 200]$	0	-45	+45	0
$[200, 18580]$	0	0	+45	+45
$[18580, \infty)$	0	0	0	0

Nota: El sistema es de fase no mínima, para la fase el cero $1-jv/20$ se comporta como un polo.

Fases en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(v \leq 0.1 \text{ rad/seg}) = 0^\circ$$

$$\varphi(v = 2 \text{ rad/seg}) = 0^\circ - 90 \log \frac{2}{0.1} = -117.1^\circ$$

$$\varphi(v = 10 \text{ rad/seg}) = -117.1^\circ - 135 \log \frac{10}{2} = -117.1^\circ - 94.36 = -211.46^\circ$$

$$\varphi(v = 185.8 \text{ rad/seg}) = -211.46^\circ - 45 \log \frac{185.8}{10} = -211.46 - 57.11 = -268.57^\circ$$

$$\varphi(v = 200 \text{ rad/seg}) = -268.57^\circ$$

$$\varphi(v = 18580 \text{ rad/seg}) = -268.57^\circ + 45 \log \frac{18580}{200} = -268.57 + 88.56 = -180^\circ$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de fase crítica:

$$180^\circ - 117.1^\circ = 135 \log \frac{v_f}{2} \quad v_f = 2 \cdot 10^{\frac{62.9}{135}}$$

$$v_f = 5.85 \text{ rad/seg}$$

Cálculo del margen de fase MF y margen de ganancia MG:

$$\begin{aligned} \text{MF} &= \varphi(v = v_a) + 180^\circ = \varphi(v = 3.16) + 180^\circ = \left[\varphi(v = 2 \text{ rad/seg}) - 135 \log \frac{v_a}{2} \right] + 180^\circ = \\ &= \left[-117.1^\circ - 135 \log \frac{3.16}{2} \right] + 180^\circ = -143.92^\circ + 180^\circ \end{aligned}$$

$$\boxed{MF = 36.08^\circ}$$

$$MG = A(v = v_f) = A(v = 5.85) =$$

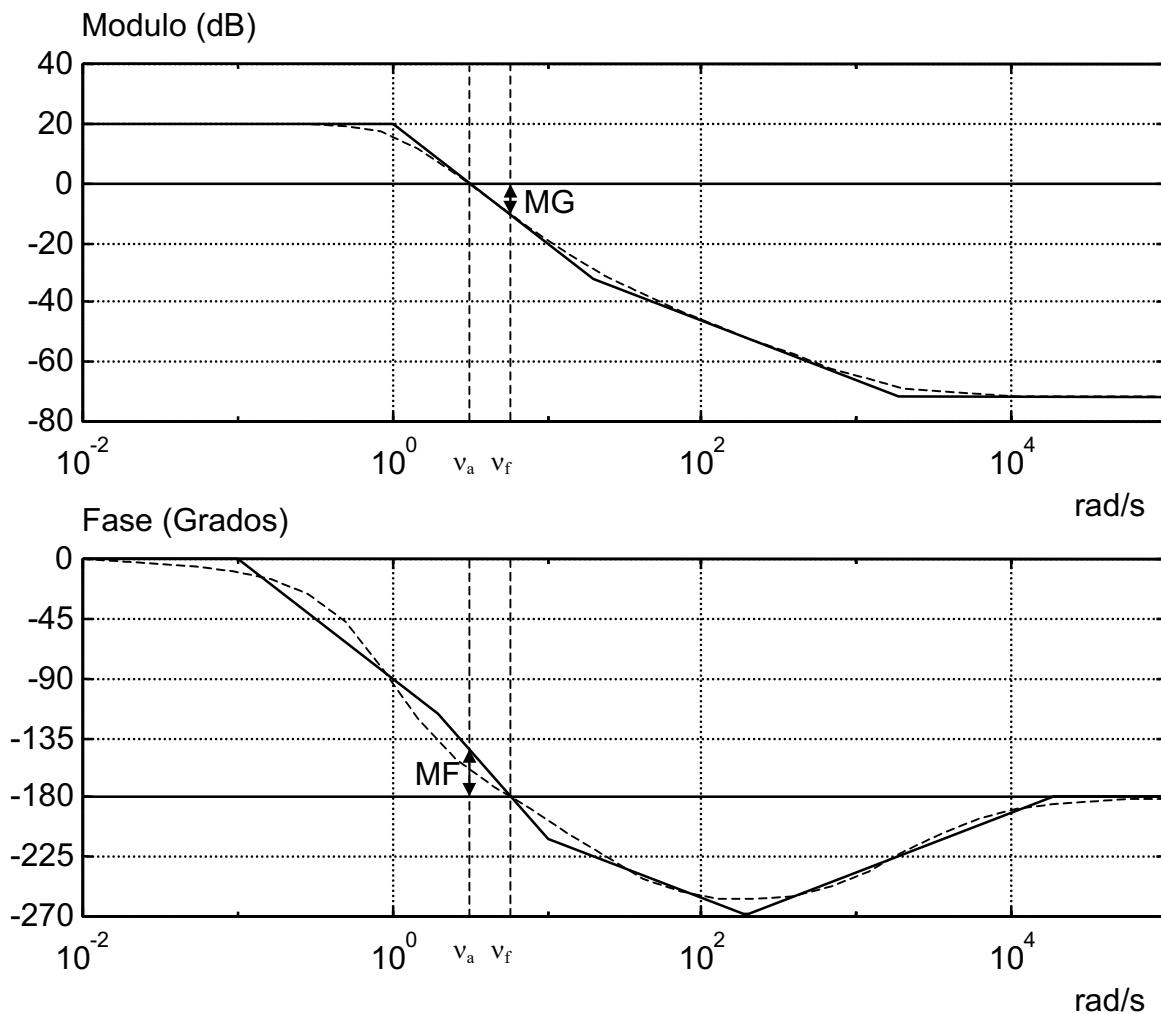
$$= A(v = 1 \text{ rad/seg}) - 40 \log \frac{v_f}{1} = 20 - 40 \log \frac{5.85}{1} = 20 - 30.69 =$$

$$\boxed{MG = -10.69 \text{ dB}}$$

Estabilidad del sistema de lazo cerrado:

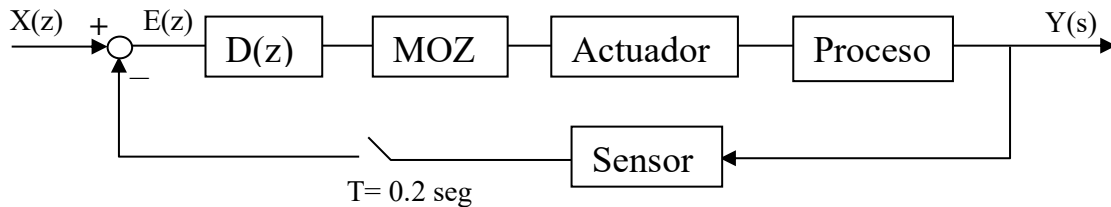
El sistema de lazo cerrado es estable: el margen de ganancia está por debajo de 0dB y el margen de fase está por encima de los -180° , es decir, $v_a < v_f$.

La figura muestra la representación de los diagramas de Bode asintóticos en línea continua y la correspondiente a los diagramas de Bode reales en línea discontinua.



EJERCICIO 11.6

Dado el sistema simplificado de control de temperatura de un proceso:



Donde:

El actuador tiene como función de transferencia: $A(s) = \frac{0.64}{s+1}$

El proceso se representa mediante la función de transferencia: $G(s) = \frac{50}{5s+1}$

Existe un sensor de temperatura que transforma la temperatura leída (°C) en un valor de tensión (V), cuya función de transferencia es: $H(s) = 0.03$

Considerando el sistema equivalente discreto y $D(z)=34$, dibujar los diagramas de Bode del sistema en lazo abierto y calcular el margen de fase y ganancia.

La discretización del sistema puede verse en el ejercicio 4.6.

La función de transferencia de lazo abierto del sistema discreto equivalente es:

$$KGH(z) = 34 \frac{0.0035(z + 0.9293)}{(z - 0.8187)(z - 0.9608)} = \frac{0.119(z + 0.9293)}{(z - 0.8187)(z - 0.9608)}$$

Aplicando la transformación bilineal:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + \frac{0.2}{2}w}{1 - \frac{0.2}{2}w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$$

$$\begin{aligned} KGH(w) &= \frac{0.119 \left(\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w} + 0.9293 \right)}{\left(\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w} - 0.8187 \right) \left(\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w} - 0.9608 \right)} = \\ &= \frac{0.119 \left(\frac{1 + 0.1w + 0.9293 - 0.09293w}{1 - 0.1w} \right)}{\left(\frac{1 + 0.1w - 0.8187 + 0.08187w}{1 - 0.1w} \right) \left(\frac{1 + 0.1w - 0.9608 + 0.09608w}{1 - 0.1w} \right)} = \end{aligned}$$

$$= 0.119 \frac{(1.9293 + 0.0071w)(1 - 0.1w)}{(0.1813 + 0.1819w)(0.0392 + 0.1961w)} =$$

$$= \frac{0.119 \cdot 1.9293}{0.1813 \cdot 0.0392} \frac{\left(1 + \frac{w}{271.73}\right) \left(1 - \frac{w}{10}\right)}{\left(1 + \frac{w}{0.9967}\right) \left(1 + \frac{w}{0.1999}\right)}$$

$$KGH(w) = 32.3 \frac{\left(1 + \frac{w}{271.73}\right) \left(1 - \frac{w}{10}\right)}{\left(1 + \frac{w}{0.9967}\right) \left(1 + \frac{w}{0.1999}\right)}$$

Sustituyendo w por jv :

$$GH(jv) = 32.3 \frac{\left(1 + \frac{jv}{271.73}\right) \left(1 - \frac{jv}{10}\right)}{\left(1 + \frac{jv}{0.9967}\right) \left(1 + \frac{jv}{0.1999}\right)}$$

$$GH(jv) \approx 32.3 \frac{\left(1 + \frac{jv}{272}\right) \left(1 - \frac{jv}{10}\right)}{\left(1 + \frac{jv}{1}\right) \left(1 + \frac{jv}{0.2}\right)}$$

Frecuencias de corte: 0.2, 1, 10 y 272.

Para el diagrama de módulo las pendientes serán:

Término	$(1+jv/0.2)^{-1}$	$(1+jv/1)^{-1}$	$1-jv/10$	$1+jv/272$	Pendiente acum.
$(0, 0.2]$	0	0	0	0	0
$[0.2, 1]$	-20	0	0	0	-20
$[1, 10]$	-20	-20	0	0	-40
$[10, 272]$	-20	-20	+20	0	-20
$[272, \infty]$	-20	-20	+20	+20	0

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(v < 0.2 \text{ rad/seg}) = 20 \log 32.3 = 30.18 \text{ dB}$$

$$A(v = 1 \text{ rad/seg}) = 30.18 - 20 \log \frac{1}{0.2} = 30.18 - 13.98 = 16.2 \text{ dB}$$

$$A(v = 10 \text{ rad/seg}) = 16.2 - 40 \log \frac{10}{1} = 16.2 - 40 = -23.8 \text{ dB}$$

$$A(v = 272 \text{ rad/seg}) = -23.8 - 20 \log \frac{272}{10} = -23.8 - 28.69 = -52.49 \text{ dB}$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica:

$$16.2 = 40 \log \frac{v_a}{1} \quad v_a = 10^{\frac{16.2}{40}}$$

$$v_a = 2.54 \text{ rad/seg}$$

Para el diagrama de fase las pendientes serán:

Término	$(1+jv/0.2)^{-1}$	$(1+jv/1)^{-1}$	$1-jv/10$	$1+jv/272$	Pendiente acum.
$(0, 0.02]$	0	0	0	0	0
$[0.02, 0.1]$	-45	0	0	0	-45
$[0.1, 1]$	-45	-45	0	0	-90
$[1, 2]$	-45	-45	-45	0	-135
$[2, 10]$	0	-45	-45	0	-90
$[10, 27.2]$	0	0	-45	0	-45
$[27.2, 100]$	0	0	-45	+45	0
$[100, 2720]$	0	0	0	+45	+45
$[2720, \infty)$	0	0	0	0	0

Nota: El sistema es de fase no mínima, para la fase el cero $1-jv/10$ se comporta como un polo.

Fases en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(v \leq 0.02 \text{ rad/seg}) = 0^\circ$$

$$\varphi(v = 0.1 \text{ rad/seg}) = 0^\circ - 45 \log \frac{0.1}{0.02} = -31.45^\circ$$

$$\varphi(v = 1 \text{ rad/seg}) = -31.45^\circ - 90 \log \frac{1}{0.1} = -31.45^\circ - 90^\circ = -121.45^\circ$$

$$\varphi(v = 2 \text{ rad/seg}) = -121.45^\circ - 135 \log \frac{2}{1} = -121.45^\circ - 40.64^\circ = -162.09^\circ$$

$$\varphi(\nu = 10 \text{ rad/seg}) = -162.09^\circ - 90 \log \frac{10}{2} = -162.09^\circ - 62.91^\circ = -225^\circ$$

$$\varphi(\nu = 27.2 \text{ rad/seg}) = -225^\circ - 45 \log \frac{27.2}{10} = -225^\circ - 19.56^\circ = -244.56^\circ$$

$$\varphi(\nu = 100 \text{ rad/seg}) = -244.56^\circ$$

$$\varphi(\nu = 2720 \text{ rad/seg}) = -244.56^\circ + 45 \log \frac{2720}{100} = -244.56^\circ + 64.56^\circ = 180^\circ$$

Cálculo de la frecuencia correspondiente al punto de fase crítica:

$$180^\circ - 162.09^\circ = 90 \log \frac{\nu_f}{2} \quad \nu_f = 2 \cdot 10^{\frac{17.91}{90}}$$

$$\boxed{\nu_f = 3.16 \text{ rad/seg}}$$

Cálculo del margen de fase MF y margen de ganancia MG:

$$\begin{aligned} \text{MF} = \varphi(\nu = \nu_a) + 180^\circ &= \varphi(\nu = 2.54 \text{ rad/s}) + 180^\circ = \left[\varphi(\nu = 2 \text{ rad/seg}) - 90 \log \frac{\nu_a}{2} \right] + 180^\circ = \\ &= \left[-162.09^\circ - 90 \log \frac{2.54}{2} \right] + 180^\circ = -171.43^\circ + 180^\circ \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{MF} = 8.57^\circ}$$

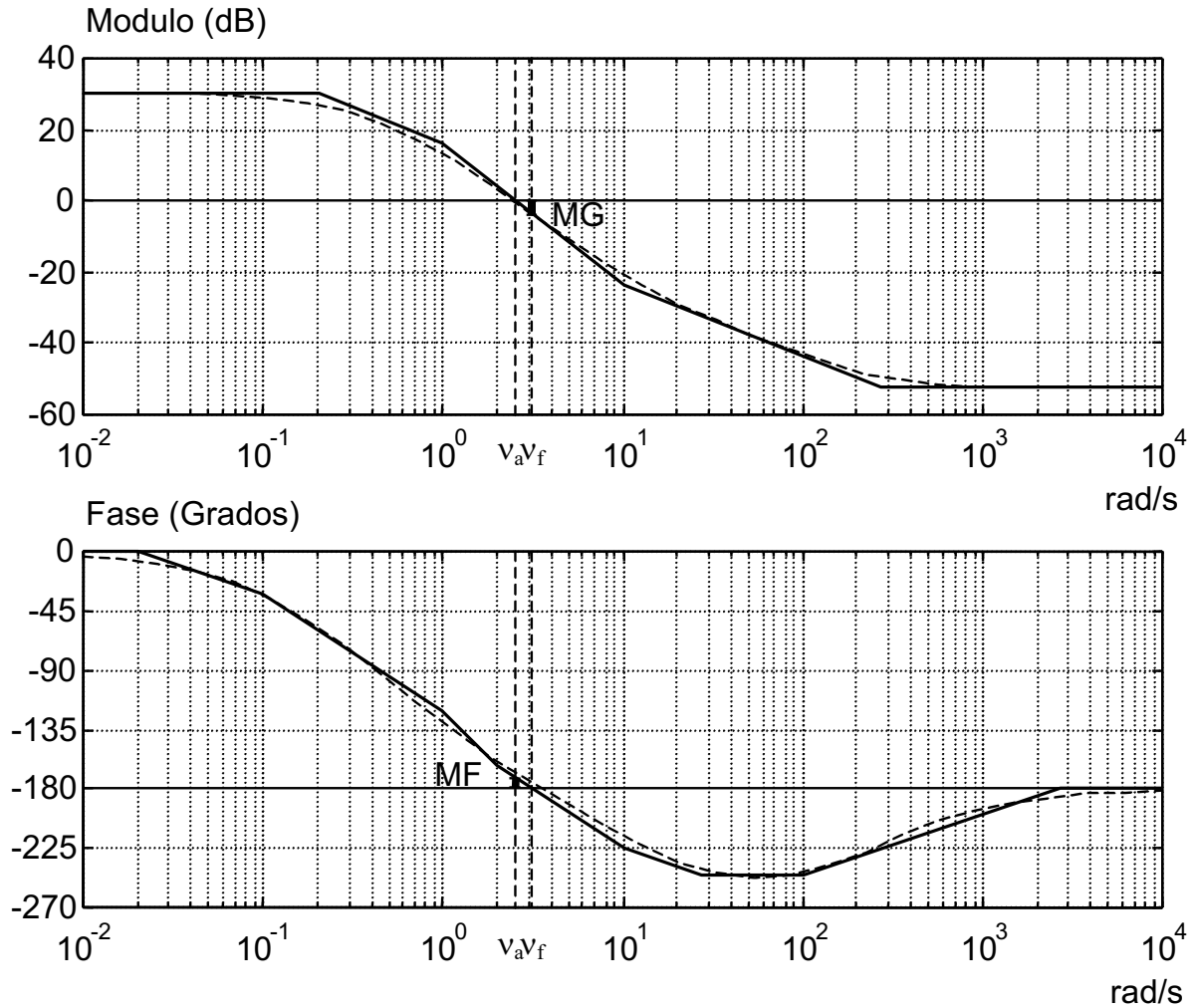
$$\text{MG} = A(\nu = \nu_f) = A(\nu = 3.16 \text{ rad/s}) = A(\nu = 1 \text{ rad/s}) - 40 \log \frac{\nu_f}{1} = 16.2 - 40 \log \frac{3.16}{1}$$

$$\boxed{\text{MG} = -3.79 \text{ dB}}$$

Estabilidad del sistema de lazo cerrado:

El sistema de lazo cerrado es estable: el margen de ganancia está por debajo de 0dB y el margen de fase está por encima de los -180° , es decir, $\nu_a < \nu_f$.

La figura muestra la representación de los diagramas de Bode asintóticos en línea continua y la correspondiente a los diagramas de Bode reales en línea discontinua.



EJERCICIO 11.7

Para el ejercicio 11.6 calcular el regulador $D(z) = k$, para que el sistema presente en régimen permanente un error menor o igual al 5% y dibujar los diagramas de Bode asintóticos para este sistema compensado. Calcular analíticamente los valores de margen de fase y margen de ganancia y representarlos. Comentar la estabilidad del sistema.

$$GH(z) = \frac{0.0035(z + 0.9293)}{(z - 0.8187)(z - 0.9608)}$$

Error ante entrada escalón:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.0035(z + 0.9293)}{(z - 0.8187)(z - 0.9608)} = 0.9501$$

luego el error inicial será:

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 0.9501} = 0.5128$$

Se pide que el error sea menor o igual a 0.05:

$$e'_{rp} = \frac{1}{1 + K'_p} = 0.05 \quad K'_p = 19$$

$$K'_p = \lim_{z \rightarrow 1} k \cdot \frac{0.0035(z + 0.9293)}{(z - 0.8187)(z - 0.9608)} = 0.9501 \cdot k = 19 \quad k = 19.9979 \approx 20$$

luego el regulador proporcional será:

$$\boxed{D(z) = 20}$$

La nueva función de transferencia del sistema compensado en ganancia es:

$$GH'(z) = \frac{20 \cdot 0.0035 \cdot (z + 0.9293)}{(z - 0.8187)(z - 0.9608)} = \frac{0.07 \cdot (z + 0.9293)}{(z - 0.8187)(z - 0.9608)}$$

Aplicando la transformación bilineal:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + \frac{0.2}{2}w}{1 - \frac{0.2}{2}w} = \frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w}$$

$$GH'(w) = \frac{0.07 \cdot \left[\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w} + 0.9293 \right]}{\left[\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w} - 0.8187 \right] \left[\frac{1 + 0.1w}{1 - 0.1w} - 0.9608 \right]}$$

$$GH'(w) = \frac{0.07 \left[\frac{1 + 0.1w + 0.9293w}{1 - 0.1w} \right]}{\left[\frac{1 + 0.1w - 0.8187 + 0.08187w}{1 - 0.1w} \right] \cdot \left[\frac{1 + 0.1w - 0.9608 + 0.09608w}{1 - 0.1w} \right]}$$

$$GH'(w) = \frac{0.07 \left(1 + \frac{0.071w}{1.9293} \right) \cdot 1.9293 \left(1 - \frac{w}{10} \right)}{0.1813 \left(1 + \frac{0.1819w}{0.1813} \right) \cdot 0.0392 \left(1 + \frac{0.1961w}{0.0392} \right)}$$

$$\boxed{GH'(w) = \frac{19.0026 \left(1 + \frac{w}{271.73} \right) \left(1 - \frac{w}{10} \right)}{\left(1 + \frac{w}{0.9967} \right) \left(1 + \frac{w}{0.1999} \right)}}$$

Pasamos de w a jv:

$$GH'(jv) = \frac{19.0026 \left(1 + \frac{jv}{271.73}\right) \left(1 - \frac{jv}{10}\right)}{\left(1 + \frac{jv}{0.9967}\right) \left(1 + \frac{jv}{0.1999}\right)}$$

$$GH'(jv) \approx \frac{19 \left(1 + \frac{jv}{272}\right) \left(1 - \frac{jv}{10}\right)}{\left(1 + \frac{jv}{1}\right) \left(1 + \frac{jv}{0.2}\right)}$$

Para el diagrama del módulo las pendientes serán:

Término	$(1+jv/0.2)^{-1}$	$(1+jv/1)^{-1}$	$(1-jv/10)$	$(1+jv/272)$	Pendiente acum.
$(0.01, 0.2]$	0	0	0	0	0
$[0.2, 1]$	-20	0	0	0	-20
$[1, 10]$	-20	-20	0	0	-40
$[10, 272]$	-20	-20	+20	0	-20
$[272, \infty)$	-20	-20	+20	+20	0

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(v \leq 0.2) = 20 \log 19 = 25.575 \text{ dB}$$

$$A(v = 1 \text{ rad/seg}) = 25.575 - 20 \log \frac{1}{0.2} = 25.575 - 13.9794 = 11.5956 \text{ dB}$$

$$A(v = 10 \text{ rad/seg}) = 11.5956 - 40 \log \frac{10}{1} = 11.5956 - 40 = -28.4044 \text{ dB}$$

$$A(v \geq 272 \text{ rad/seg}) = -28.4044 - 20 \log \frac{272}{10} = -28.4044 - 28.6914 = -57.0958 \text{ dB}$$

Frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica:

$$11.5956 = 40 \log \frac{v_a}{1} \quad v_a = 10^{\frac{11.5956}{40}}$$

$$v_a = 1.9494 \text{ rad/seg}$$

Para el diagrama de fase las pendientes serán:

Término	$(1+jv / 0.2)^{-1}$	$(1+jv / 1)^{-1}$	$(1-jv / 10)$	$(1+jv / 272)$	Pendiente acum.
$(0.01, 0.02]$	0	0	0	0	0
$[0.02, 0.1]$	-45	0	0	0	-45
$[0.1, 1]$	-45	-45	0	0	-90
$[1, 2]$	-45	-45	-45	0	-135
$[2, 10]$	0	-45	-45	0	-90
$[10, 27.2]$	0	0	-45	0	-45
$[27.2, 100]$	0	0	-45	+45	0
$[100, 2720]$	0	0	0	+45	+45
$[2720, \infty)$	0	0	0	0	0

Nota: el sistema es de fase no mínima, por tanto para la fase el cero en $1-jv / 10$ se comporta como un polo.

Fase en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(v \leq 0.02 \text{ rad/seg}) = 0^\circ$$

$$\varphi(v = 0.1 \text{ rad/seg}) = -45 \log \frac{0.1}{0.02} = -31.4537^\circ$$

$$\varphi(v = 1 \text{ rad/seg}) = -31.4537 - 90 \log \frac{1}{0.1} = -31.4537 - 90 = -121.4537^\circ$$

$$\varphi(v = 2 \text{ rad/seg}) = -121.4537 - 135 \log \frac{2}{1} = -121.4537 - 40.6390 = -162.0927^\circ$$

$$\varphi(v = 10 \text{ rad/seg}) = -162.0927 - 90 \log \frac{10}{2} = -162.0927 - 62.9073 = -225^\circ$$

$$\varphi(v = 27.2 \text{ rad/seg}) = -225 - 45 \log \frac{27.2}{10} = -225 - 19.5556 = -244.5556^\circ$$

$$\varphi(v = 100 \text{ rad/seg}) = -244.5556^\circ$$

$$\varphi(v = 2720 \text{ rad/seg}) = -244.5556 + 45 \log \frac{2720}{100} = -244.5556 + 64.5556 = -180^\circ$$

Frecuencia correspondiente al punto de fase crítica:

$$180 - 162.0927 = 90 \log \frac{v_f}{2} \quad v_f = 2 \cdot 10^{\frac{17.9073}{90}}$$

$$v_f = 3.1623 \text{ rad/seg}$$

Cálculo del margen de fase MF y margen de ganancia MG:

$$\begin{aligned} MF &= \varphi(v = v_a) + 180^\circ = \varphi(v = 1.9494 \text{ rad/s}) + 180^\circ = \left[\varphi(v = 1 \text{ rad/seg}) - 135 \log \frac{v_a}{1} \right] + 180^\circ = \\ &= \left[-121.4537^\circ - 135 \log \frac{1.9494}{1} \right] + 180^\circ = -160.59^\circ + 180^\circ \end{aligned}$$

$$MF = 19.41^\circ$$

$$MG = A(v = v_f) = A(v = 3.1623 \text{ rad/s}) = A(v = 1 \text{ rad/s}) - 40 \log \frac{v_f}{1} = 11.5956 - 40 \log \frac{3.1623}{1}$$

$$MG = -8.4045 \text{ dB}$$

Estabilidad del sistema de lazo cerrado:

El sistema de lazo cerrado es estable: el margen de ganancia está por debajo de 0dB y el margen de fase está por encima de los -180° , es decir, $v_a < v_f$.

La figura muestra la representación de los diagramas de Bode asintóticos en línea continua y la correspondiente a los diagramas de Bode reales en línea discontinua.

