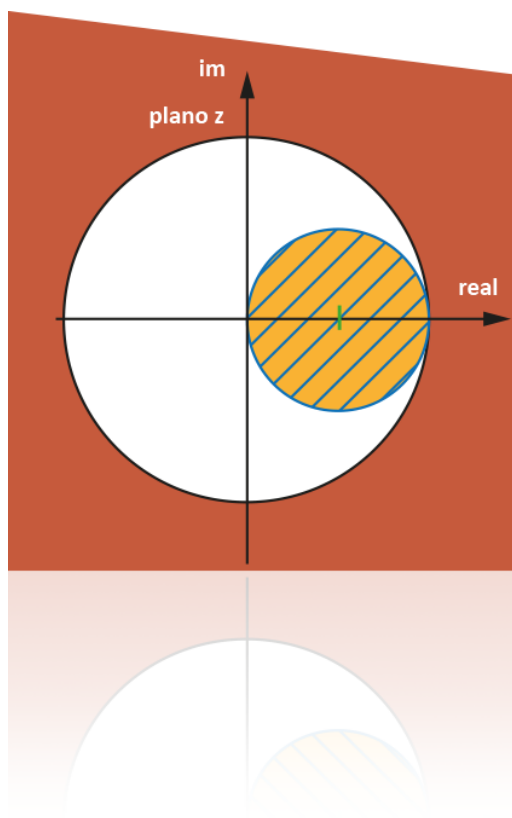


Control por computador

Ejercicios 1



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

$$\text{Residuo}|_{z=e^{-aT}} = \frac{e^{-a(k+1)T}}{(e^{-aT} - 1)^2}$$

$$\text{Residuo}|_{z=a} = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m X(z) z^{k-1} \right) \right]_{z=a}$$

$$\text{Residuo}|_{z=1} = \frac{1}{(2-1)!} \left[\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left((z-1)^2 \frac{z^2}{(z-1)^2 (z-e^{-aT})} z^{k-1} \right) \right]_{z=1}$$

$$\text{Residuo}|_{z=1} = \frac{1}{(2-1)!} \left[\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left((z-1)^2 \frac{z^2}{(z-1)^2 (z-e^{-aT})} z^{k-1} \right) \right]_{z=1}$$

$$\text{Residuo}|_{z=1} = \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z-e^{-aT})} z^{k-1} \right) \right]_{z=1}$$

$$\text{Residuo}|_{z=1} = \left[\frac{(k+1)z^k (z-e^{-aT}) - z^{k+1}}{(z-e^{-aT})^2} \right]_{z=1}$$

$$\text{Residuo}|_{z=1} = \frac{k}{1-e^{-aT}} - \frac{e^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2}$$

$$x_k = \frac{k}{1-e^{-aT}} - \frac{e^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2} + \frac{e^{-a(k+1)T}}{(e^{-aT} - 1)^2}$$

EJERCICIO 1.1

Resolver la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_{k+2} + 3x_{k+1} + 2x_k = 0$$

Condiciones iniciales:

$$x_0 = 0; \quad x_1 = 1;$$

Traslación real a la izquierda:

$$Z\{x_{k+n}\} = z^n \left[X(z) - \sum_{i=0}^{n-1} x_i z^{-i} \right]$$

Tomando Transformadas z:

$$z^2 x(z) - z^2 x_0 - z x_1 + 3(z x(z) - z x_0) + 2x(z) = 0$$

$$z^2 x(z) - z + 3z x(z) + 2x(z) = 0$$

$$X(z) = \frac{z}{(z^2 + 3z + 2)} = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

Transformada inversa:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z+2)} = \frac{Az + 2A + Bz + B}{(z+1)(z+2)}$$

$$A = 1; B = -1;$$

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)} + \frac{-z}{(z+2)}$$

Tablas:

$$x_k = (-1)^k - (-2)^k$$

EJERCICIO 1.2

Dado el sistema definido por su ecuación en diferencias:

$$y_k - y_{k-1} + 0.16y_{k-2} = x_{k-2}$$

- Calcular su función de transferencia
 - Calcular el valor inicial y el final de su respuesta ante un escalón unidad, por las propiedades de la transformada y por la transformada inversa.
-

Traslación real a la izquierda:

$$Z\{x_{k-n}\} = z^{-n} X(z)$$

Tomando transformadas

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.16z^{-2}Y(z) = z^{-2}X(z)$$

$$(1 - z^{-1} + 0.16z^{-2})Y(z) = z^{-2}X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.16z^{-2}}$$

$$\{x_k\} = \{1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Entonces:

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - z + 0.16} \cdot \frac{z}{z-1}$$

Valor Inicial y Final por las propiedades:

$$y_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$$

$$y_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 - z + 0.16} \cdot \frac{z}{z-1} = 0$$

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z)$$

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{z^2 - z + 0.16} \cdot \frac{z}{z-1} \right] = \frac{1}{0.16} = 6.25$$

Valor Inicial y Final por la transformada inversa:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-0.2)(z-0.8)(z-1)}$$

Por Residuos:

$$y_k = \sum_{\forall \text{ polos}} (\text{Residuos de } Y(z))$$

Tres Polos Simples, Tres Residuos:

$$\text{Residuo}|_{z=a} = \left[(z-a) X(z) z^{k-1} \right]_{z=a}$$

$$\text{Residuo}|_{z=0.2} = \left[\frac{z}{(z-0.8)(z-1)} z^{k-1} \right]_{z=0.2} = \frac{0.2^k}{0.48}$$

$$\text{Residuo}|_{z=0.8} = \left[\frac{z}{(z-0.2)(z-1)} z^{k-1} \right]_{z=0.8} = \frac{0.8^k}{0.12}$$

$$\text{Residuo}|_{z=1} = \left[\frac{z}{(z-0.2)(z-0.8)} z^{k-1} \right]_{z=1} = \frac{1}{0.16}$$

$$y_k = \frac{0.2^k}{0.48} - \frac{0.8^k}{0.12} + \frac{1}{0.16}$$

El valor inicial:

$$y_k = \frac{0.2^0}{0.48} - \frac{0.8^0}{0.12} + \frac{1}{0.16} = 0$$

El valor Final:

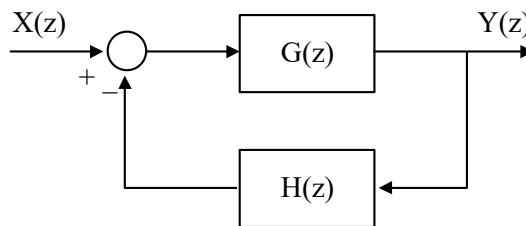
$$y_k = \frac{0.2^\infty}{0.48} - \frac{0.8^\infty}{0.12} + \frac{1}{0.16} = 6.25$$

EJERCICIO 1.3

La respuesta al impulso del sistema completo mostrado en la figura, utilizando un periodo de muestreo de 1 segundo, viene dada por la siguiente expresión:

$$y_n = 0.6808 \cdot \text{sen}(1.0462n) \cdot 0.8485^n$$

Sabiendo que $H(z) = \frac{10}{z}$, calcular el valor del equivalente discreto del lazo directo $G(z)$.



Comparando la respuesta del sistema $y_n = 0.6808 \cdot \text{sen}(1.0462n) \cdot 0.8485^n$ con la expresión equivalente de la tabla de transformadas Z: $y_k = e^{-akT} \text{sen}(\omega kT)$:

$$1.0462 = \omega T \rightarrow \omega = 1.0462 \text{ rad/seg}$$

$$0.8485 = e^{-aT} \rightarrow e^{-a} = 0.8485$$

$$M(z) = 0.6808 \frac{0.8485 \cdot \text{sen} 1.0462 \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot 0.8485 \cdot \cos 1.0462 \cdot z^{-1} + 0.8485^2 \cdot z^{-1}} = \frac{0.5z^{-1}}{1 - 0.85z^{-1} + 0.72}$$

$$M(z) = \frac{0.5z}{z^2 - 0.85z + 0.72}$$

$$M(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} \rightarrow G(z) = \frac{M(z)}{1 - M(z)H(z)}$$

$$G(z) = \frac{\frac{0.5z}{z^2 - 0.85z + 0.72}}{1 - \frac{0.5z}{z^2 - 0.85z + 0.72} \frac{10}{z}} = \frac{z}{2z^2 - 1.7z - 8.56}$$

$$G(z) = \frac{0.5z}{(z + 1.687)(z - 2.537)}$$