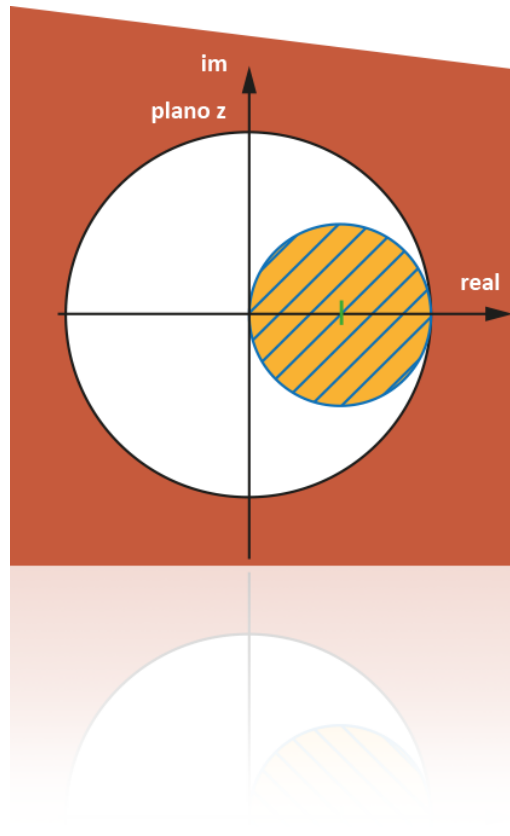


Control por computador

Ejercicios 10



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 10.1

Dado un sistema definido por su función de transferencia de cadena directa:

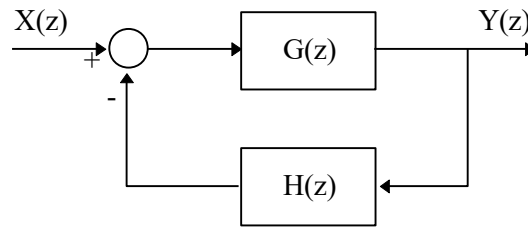
$$G(z) = \frac{0.5z}{(z + 1.687)(z - 2.537)}$$

y la realimentación:

$$H(z) = \frac{10}{z}$$

Diseñar un regulador por el método directo para que el máximo sobreimpulso se reduzca a la mitad, el tiempo de establecimiento sea 4 segundos más rápido y conserve el mismo comportamiento de régimen permanente.

Sin aplicar simplicidad y sin recalcular los polos. Periodo de muestreo: 1 segundo.



El sistema de lazo cerrado del sistema inicial será:

$$M(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{\frac{0.5z}{(z + 1.687)(z - 2.537)}}{1 + \frac{0.5z}{(z + 1.687)(z - 2.537)} \cdot \frac{10}{z}} = \frac{0.5z}{z^2 - 0.85z + 0.72}$$

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 2e^{-\sigma} \cos \alpha \cdot z + e^{-2\sigma}}$$

Comparando términos:

$$e^{-2\sigma} = 0.72 \quad \sigma = 0.1643$$

$$2 \cdot e^{-2\sigma} \cos \alpha = 0.85 \quad \cos \alpha = 0.5 \quad \alpha = 1.0462$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = e^{-\frac{\pi \cdot 0.1643}{1.0462}} = 0.6106 = 61.06\%$$

$$k_s = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{0.1643} = 19.20 \cong 20$$

Como este sistema posee un retardo menos que el sistema canónico empleado:

$$k_s = 19 \text{ muestras}$$

Modelo:

$$\frac{\pi}{\sigma} = 19 - 4 = 15 \quad \sigma = 0.2094 \quad e^{-\sigma} = 0.8111$$

$$M'_p = \frac{M_p}{2} e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = \frac{0.6106}{2} \quad \alpha = 0.5544$$

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 2e^{-\sigma} \cos \alpha \cdot z + e^{-2\sigma}} = \frac{k}{z^2 - 2 \cdot 0.8111 \cdot \cos 0.5544 \cdot z + 0.8111^2}$$

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 1.3792z + 0.6579}$$

La función de transferencia $G(z)$ contiene dos polos inestables. Los polos inestables de $G(z)$ deben formar parte de $1-M(z)H(z)$ para que la función de transferencia del regulador no contenga dichas inestabilidades.

El modelo debe contener tantas incógnitas como condiciones haya que ajustar. En este caso se debe forzar la desaparición en el regulador de las dos inestabilidades existentes en $G(z)$ y se tiene además una condición de régimen permanente. Luego el modelo será:

$$M(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z^2 - 1.3792z + 0.6579}$$

Es necesario añadir un retardo al modelo para que se siga cumpliendo la condición de causalidad.

$$M(z) = \frac{az^2 + bz + c}{z(z^2 - 1.3792z + 0.6579)}$$

$$1 - M(z)H(z) \Big|_{z=-1.687} = 0$$

$$1 - \frac{a(-1.687)^2 + b(-1.687) + c}{(-1.687)((-1.687)^2 - 1.379(-1.687) + 0.6579)} \cdot \frac{10}{(-1.687)} = 0$$

$$1 - \frac{2.8460a - 1.687b + c}{1.6594} = 0$$

$$2.8460a - 1.687b + c = 1.6594$$

$$1 - M(z)H(z) \Big|_{z=2.537} = 0$$

$$1 - \frac{a \cdot 2.537^2 + b \cdot 2.537 + c}{2.537(2.537^2 - 1.379 \cdot 2.537 + 0.6579)} \cdot \frac{10}{2.537} = 0$$

$$1 - \frac{6.4364a + 2.537b + c}{2.3140} = 0$$

$$6.436a + 2.537b + c = 2.3140$$

Comportamiento en régimen permanente:

Para el sistema inicial se tiene:

$$y_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{0.5z}{z^2 - 0.85z + 0.72} \cdot \frac{z}{z-1} = 0.5747$$

Para el modelo se tendrá entonces:

$$y'_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{az^2 + bz + c}{z(z^2 - 1.3792z + 0.6579)} \cdot \frac{z}{z-1} = 0.5747$$

$$a + b + c = 0.1602$$

Por tanto el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} 2.8460a - 1.687b + c = 1.6594 \\ 6.436a + 2.537b + c = 2.3140 \\ a + b + c = 0.1602 \end{cases}$$

$$a = 0.46386$$

$$b = -0.23927$$

$$c = -0.06439$$

Luego el modelo final es:

$$M(z) = \frac{0.46386z^2 - 0.23927z - 0.06439}{z(z^2 - 1.3792z + 0.6579)}$$

Y el regulador:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\frac{0.4639z^2 - 0.2393z - 0.0644}{z(z^2 - 1.3792z + 0.6579)}}{\frac{0.5z}{(z + 1.687)(z - 2.537)}} \left[1 - \frac{0.4639z^2 - 0.2393z - 0.0644}{z(z^2 - 1.3792z + 0.6579)} \cdot \frac{10}{z} \right] = \\ &= \frac{\frac{0.4639z^2 - 0.2393z - 0.0644}{z(z^2 - 1.3792z + 0.6579)}}{\frac{0.5z}{(z + 1.687)(z - 2.537)}} \left[\frac{(z - 0.7341)(z + 1.687)(z - 2.537)(z + 0.249)}{z(z^2 - 1.3792z + 0.6579)} \right] \end{aligned}$$

$$F(z) = \frac{0.4639z^2 - 0.2393z - 0.0644}{0.5z(z - 0.7341)(z + 0.249)}$$

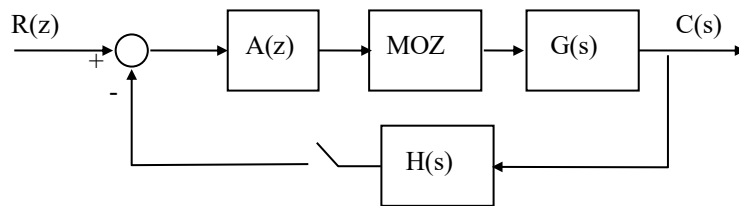
EJERCICIO 10.2.

Para el sistema mostrado en la figura donde:

$$G(s) = \frac{5}{s+2} \quad H(s) = \frac{1}{(s+3)(s+4)}$$

Calcular el regulador discreto $A(z)$, por el método directo (Truxal), tal que su comportamiento sea similar a uno de segundo orden con las siguientes condiciones de funcionamiento: máximo sobreimpulso del 20%, tiempo de pico de 1 segundo y ganancia en estado estacionario de 0.5.

Utilizar un periodo de muestreo de 0.5 segundos.



Cálculo del equivalente discreto de $G(s)$ y $GH(s)$:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{5}{s(s+2)} \right] = 5 \frac{z-1}{z} \sum_{\text{Polos}} \text{Residuos} \left[\frac{1}{s(s+2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

$$R_1 = \left[s \frac{1}{s(s+2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=0} = \left[\frac{1}{(s+2)} \frac{z}{z - e^{0.5s}} \right]_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{z}{z-1}$$

$$R_2 = \left[(s+2) \frac{1}{s(s+2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-2} = \frac{1}{s} \frac{z}{z - e^{0.5s}} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2} \frac{z}{z-0.3679}$$

$$G(z) = 5 \frac{z-1}{z} \left[\frac{1}{2} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-0.3679} \right] = 2.5(z-1) \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0.3679} \right]$$

$$G(z) = 2.5(z-1) \frac{(z-0.3679) - (z-1)}{(z-1)(z-0.3679)}$$

$$G(z) = \frac{1.5803}{(z-0.3679)}$$

$$GH(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{5}{s(s+2)(s+3)(s+4)}\right] = 5 \frac{z-1}{z} \sum_{\text{Polos}} \text{Residuos} \left[\frac{1}{s(s+2)(s+3)(s+4)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

$$R_1 = \left[s \frac{1}{s(s+2)(s+3)(s+4)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=0} = \left[\frac{1}{(s+2)(s+3)(s+4)} \frac{z}{z - e^{0.5s}} \right]_{s=0} = \frac{1}{24} \frac{z}{z-1}$$

$$R_2 = \left[(s+2) \frac{1}{s(s+2)(s+3)(s+4)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-2} = \frac{1}{s(s+3)(s+4)} \frac{z}{z - e^{0.5s}} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \frac{z}{z-0.3679}$$

$$R_3 = \left[(s+3) \frac{1}{s(s+2)(s+3)(s+4)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-3} = \frac{1}{s(s+2)(s+4)} \frac{z}{z - e^{0.5s}} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{3} \frac{z}{z-0.2231}$$

$$R_4 = \left[(s+4) \frac{1}{s(s+2)(s+3)(s+4)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-4} = \frac{1}{s(s+2)(s+3)} \frac{z}{z - e^{0.5s}} \Big|_{s=-4} = -\frac{1}{8} \frac{z}{z-0.1353}$$

$$GH(z) = 5 \frac{z-1}{z} \left[\frac{1}{24} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{4} \frac{z}{z-0.3679} + \frac{1}{3} \frac{z}{z-0.2231} - \frac{1}{8} \frac{z}{z-0.1353} \right] =$$

$$= 5(z-1) \left[\frac{1}{24(z-1)} - \frac{1}{4(z-0.3679)} + \frac{1}{3(z-0.2231)} - \frac{1}{8(z-0.1353)} \right] =$$

$$= 5(z-1) \frac{(z-0.3679)(z-0.2231)(z-0.1353) - 6(z-1)(z-0.2231)(z-0.1353) + 8(z-1)(z-0.3679)(z-0.1353) - 3(z-1)(z-0.3679)(z-0.2231)}{24(z-1)(z-0.3679)(z-0.2231)(z-0.1353)} =$$

$$= 5(z-1) \frac{0.1715z^2 + 0.2351z + 0.01803}{24(z-1)(z-0.3679)(z-0.2231)(z-0.1353)}$$

$$GH(z) = 0.0357 \frac{(z+0.0815)(z+1.2893)}{(z-0.3679)(z-0.2231)(z-0.1353)}$$

Modelo:

$$t_p = 1 \text{ segundo}$$

$$t_p = K_p T$$

$$1 = K_p 0.5$$

$$K_p = 2$$

$$K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 2$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$Mp = 20\% \quad Mp = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.2 \quad e^{-\frac{\pi\sigma}{\frac{\pi}{2}}} = 0.2 \quad e^{-2\sigma} = 0.2$$

$$\sigma = -\frac{\ln 0.2}{2} = 0.805 \quad e^{-\sigma} = e^{-0.805} = 0.447$$

Por tanto el modelo quedará de la forma:

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 2e^{-\sigma} \cos \alpha z + e^{-2\sigma}} = \frac{k}{z^2 + 0.2}$$

Causalidad:

Retardo del modelo: 2

Retardo de la planta: 1

Retardo del modelo $\geq$ retardo de la planta $2 > 1$ luego cumple causalidad

Estabilidad:

$G(z)$ no tiene polos ni ceros inestables

Comportamiento estático:

Se pide una ganancia en estado estacionario de 0.5:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{k}{z^2 + 0.2} = 0.5 \qquad \frac{k}{1.2} = 0.5 \qquad k = 0.6$$

Luego el modelo final será: $M(z) = \frac{0.6}{z^2 + 0.2}$

Despejando el regulador:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{M(z)}{G(z) - M(z)GH(z)} = \frac{\frac{0.6}{z^2 + 0.2}}{\frac{1.5803}{z - 0.3679} - \frac{0.6}{z^2 + 0.2} \frac{0.0357(z + 0.0815)(z + 1.2893)}{(z - 0.3679)(z - 0.2231)(z - 0.1353)}} = \\ &= \frac{\frac{0.6}{z^2 + 0.2}}{\frac{1.5803(z^2 + 0.2)(z - 0.2231)(z - 0.1353) - 0.0214(z + 0.0815)(z + 1.2893)}{(z^2 + 0.2)(z - 0.3679)(z - 0.2231)(z - 0.1353)}} \end{aligned}$$

$$F(z) = \frac{0.3798(z - 0.3679)(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{(z - 0.0588)(z - 0.3574)(z^2 + 0.0578z + 0.2198)} =$$

Si se resuelve aplicando simplicidad:

Añadir como ceros al modelo los ceros de $G(z)$ y los polos de $GH(z)$ que no estén en $G(z)$:

$$M(z) = \frac{(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z^2 + 0.2}$$

Causalidad:

Retardo del modelo: 0

Retardo de la planta: 1

Retardo del modelo $\geq$ retardo de la planta No se cumple causalidad

Es necesario añadir un polo en el origen en el denominador. Luego el modelo quedará:

$$M(z) = \frac{(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z(z^2 + 0.2)}$$

A la vista de este modelo se deben recalcular los polos complejos del denominador para que siga cumpliendo la especificación del tiempo de pico. Observando el numerador de $M(z)$, el coeficiente de mayor valor corresponde al término z^2 luego el término que va a tener mayor influencia tendrá un retardo total de una muestra (realizando una aproximación). Como las expresiones para el cálculo del modelo corresponden a un sistema canónico con dos muestras de retardo considerar $k_p = 3$.

Nuevo modelo:

$$K_p = 3 \quad K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 3 \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$M_p = 20\% \quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.2 \quad e^{-\frac{\pi\sigma}{\frac{\pi}{3}}} = 0.2 \quad e^{-3\sigma} = 0.2$$

$$\sigma = -\frac{\ln 0.2}{3} = 0.5364 \quad e^{-\sigma} = e^{-0.5364} = 0.5848$$

$$M(z) = \frac{k(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z(z^2 - 2e^{-\sigma} \cos \alpha z + e^{-2\sigma})} = \frac{k(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)}$$

Estabilidad:

$G(z)$ no tiene polos ni ceros inestables

Comportamiento estático:

Se pide una ganancia en estado estacionario de 0.5:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{k(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)} = 0.5$$

$$\frac{k \cdot 0.7769 \cdot 0.8647}{1 - 0.5848 + 0.3420} = 0.5 \quad \frac{k \cdot 0.6718}{0.7572} = 0.5$$

$$k = 0.5636$$

Luego el modelo final será:

$$M(z) = \frac{0.5636(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)}$$

Como puede observarse el modelo al que se llega aplicando simplicidad es más complejo que el obtenido sin aplicar simplicidad. Esto llega a que las condiciones impuestas a dicho

modelo se cumplan en un grado mucho menor, ya que estas condiciones vienen sólo fijadas por el par de polos complejos conjugados del denominador, y al añadir en este caso dos ceros estamos modificando el comportamiento del sistema.

Y despejando el regulador:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{M(z)}{G(z) - M(z)GH(z)} = \\
 &= \frac{\frac{0.5636(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)}}{\frac{1.5803}{z - 0.3679} - \frac{0.5636(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)} - \frac{0.0357(z + 0.0815)(z + 1.2893)}{(z - 0.3679)(z - 0.2231)(z - 0.1353)}} = \\
 &= \frac{\frac{0.5636(z - 0.2231)(z - 0.1353)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)}}{\frac{1}{z - 0.3679} \left[1.5803 - \frac{0.5636 \cdot 0.0357(z + 0.0815)(z + 1.2893)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)} \right]} = \\
 &= \frac{\frac{0.5636(z - 0.2231)(z - 0.1353)(z - 0.3679)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)}}{\frac{1.5803z(z^2 - 0.5848z + 0.3420) - 0.0201(z + 0.0815)(z + 1.2893)}{z(z^2 - 0.5848z + 0.3420)}} = \\
 &= \frac{0.5636(z - 0.2231)(z - 0.1353)(z - 0.3679)}{1.5803z^3 - 0.9242z^2 + 0.5405z - 0.0201z^2 - 0.0276z - 0.0021} = \\
 &= \frac{0.5636(z - 0.2231)(z - 0.1353)(z - 0.3679)}{1.5803z^3 - 0.9443z^2 + 0.5129z - 0.0021} = \\
 &= \frac{0.5636(z - 0.2231)(z - 0.1353)(z - 0.3679)}{1.5803(z - 0.0041)(z^2 - 0.5934z - 0.3221)} = \\
 &\boxed{F(z) = \frac{0.3566(z - 0.2231)(z - 0.1353)(z - 0.3679)}{(z - 0.0041)(z^2 - 0.5934z - 0.3221)}}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 10.3

Se desea controlar por computador un sistema cuya función de transferencia en lazo abierto, con realimentación unitaria, es:

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(2s^2 + 7s + 3)}$$

Calcular por el método directo el regulador que haga que el sistema presente un sobreimpulso del 35%, con un tiempo de establecimiento de 6 segundos y un error en régimen permanente igual al del sistema continuo, cuando el periodo de muestreo es de 0.6 segundos y se emplea un bloqueador de orden cero.

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{20}{s(s+1)(2s^2 + 7s + 3)} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{10}{s(s+1)(s+0.5)(s+3)} \right] = \\ &= 10 \frac{z-1}{z} \sum_{\text{Polos}} \text{Residuos} \left[\frac{1}{s(s+1)(s+0.5)(s+3)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \\ R_1 &= \left[s \frac{1}{s(s+1)(s+0.5)(s+3)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=0} = \left[\frac{1}{(s+1)(s+0.5)(s+3)} \frac{z}{z - e^{0.6s}} \right]_{s=0} = \frac{1}{1.5} \frac{z}{z-1} \\ R_2 &= \left[(s+1) \frac{1}{s(s+1)(s+0.5)(s+3)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-1} = \frac{1}{s(s+0.5)(s+3)} \frac{z}{z - e^{0.6s}} \Big|_{s=-1} = \frac{z}{z-0.5488} \\ R_3 &= \left[(s+0.5) \frac{1}{s(s+1)(s+0.5)(s+3)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-0.5} = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \frac{z}{z - e^{0.6s}} \Big|_{s=-0.5} = \\ &= -\frac{1}{0.625} \frac{z}{z-0.7408} \\ R_4 &= \left[(s+3) \frac{1}{s(s+1)(s+0.5)(s+3)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-3} = \frac{1}{s(s+1)(s+0.5)} \frac{z}{z - e^{0.6s}} \Big|_{s=-3} = \\ &= -\frac{1}{15} \frac{z}{z-0.1653} \\ G(z) &= 10 \frac{z-1}{z} \left[\frac{1}{1.5} \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-0.5488} - \frac{1}{0.625} \frac{z}{z-0.7408} - \frac{1}{15} \frac{z}{z-0.1653} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 10(z-1) \left[\frac{1}{1.5} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-0.5488} - \frac{1}{0.625} \frac{1}{z-0.7408} - \frac{1}{15} \frac{1}{z-0.1653} \right] = \\
 &= 10(z-1) \frac{10(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653) + 15(z-1)(z-0.7408)(z-0.1653) -}{15(z-1)(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653)} = \\
 &= \frac{10(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653) + 15(z-1)(z-0.7408)(z-0.1653) -}{1.5(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653)} = \\
 &= \frac{10z^3 - 14.549z^2 + 6.1972z - 0.6720 + 15z^3 - 28.5915z^2 + 15.4283z - 1.8368 -}{1.5(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653)} = \\
 &= \frac{-24z^3 + 41.1384z^2 - 19.3156z + 2.1772 - z^3 + 2.2896z^2 - 1.6962z + 0.4066}{1.5(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653)} = \\
 &= \frac{0.2875z^2 + 0.6137z + 0.075}{1.5(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653)} = \frac{0.192(z^2 + 2.135z + 0.2609)}{(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653)} \\
 &\boxed{G(z) = \frac{0.192(z+0.1301)(z+2.0049)}{(z-0.5488)(z-0.7408)(z-0.1653)}}
 \end{aligned}$$

Modelo:

$$\begin{aligned}
 t_s &= K_s T = K_s 0.6 = 6 & K_s &= 10 & K_s &= \frac{\pi}{\sigma} = 10 & \sigma &= \frac{\pi}{10} \\
 M_p &= 35\% & M_p &= e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.35 & e^{-\frac{\pi^2}{10\alpha}} &= 0.35 & -\frac{\pi^2}{10\alpha} &= \ln 0.35 \\
 \alpha &= -\frac{\pi^2}{10 \ln 0.35} = 0.9401 \text{ rad} & e^{-\sigma} &= e^{-\frac{\pi}{10}} = 0.7304 \\
 M(z) &= \frac{k}{z^2 - 2e^{-\sigma} \cos \alpha z + e^{-2\sigma}} = \frac{k}{z^2 - 2 \cdot 0.7304 \cdot \cos 0.9401z + 0.5329} \\
 M(z) &= \frac{k}{z^2 - 0.8614z + 0.5335}
 \end{aligned}$$

Causalidad:

Retardo del modelo: 2
 Retardo de la planta: 1
 Retardo del modelo $\geq$ retardo de la planta $2 \geq 1$ luego cumple causalidad

Estabilidad:

$G(z)$ tiene un cero inestable en $z = -2.0049$

Los ceros inestables de $G(z)$ deben pasar a ser ceros de $M(z)$:

$$M(z) = \frac{k(z + 2.0049)}{z^2 - 0.8614z + 0.5335}$$

Causalidad:

Retardo del modelo: 1

Retardo de la planta: 1

Retardo del modelo $\geq$ retardo de la planta $1 \geq 1$ luego cumple causalidad

Error de régimen permanente del sistema continuo:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20}{(s+1)(2s^2 + 7s + 3)} = \frac{20}{3}$$

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \frac{20}{3}} = \frac{3}{23}$$

Error de régimen permanente del modelo discreto (al ser realimentación unitaria):

$$e_{rp} = 1 - M(1) = 1 - \frac{k(1 + 2.0049)}{1 - 0.8614 + 0.5335} = 1 - 4.47k = \frac{3}{23}$$

$$k = 0.195$$

Luego el modelo final es:

$$M(z) = \frac{0.195(z + 2.0049)}{z^2 - 0.8614z + 0.5335}$$

Despejando el regulador:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{M(z)}{G(z)(1 - M(z))} = \frac{\frac{0.195(z + 2.0049)}{z^2 - 0.8614z + 0.5335}}{\frac{0.192(z + 0.1301)(z + 2.0049)}{(z - 0.5488)(z - 0.7408)(z - 0.1653)} \left[1 - \frac{0.195(z + 2.0049)}{z^2 - 0.8614z + 0.5335} \right]} = \\ &= \frac{0.195}{\frac{0.192(z + 0.1301)}{(z - 0.5488)(z - 0.7408)(z - 0.1653)} \left[\frac{z^2 - 0.8614z + 0.5335 - 0.195z - 0.3910}{z^2 - 0.8614z + 0.5335} \right]} \end{aligned}$$

$$F(z) = \frac{0.195(z - 0.5488)(z - 0.7408)(z - 0.1653)}{0.192(z + 0.1301)(z^2 - 1.0564z + 0.1425)}$$

EJERCICIO 10.4

Para un sistema de control discreto con realimentación unitaria y una función de transferencia de lazo directo dada por la siguiente expresión:

$$G(z) = \frac{(z + 1.2)}{z(z - 0.5)(z + 0.3)}$$

Calcular un regulador discreto por el método directo para que el sistema en lazo cerrado funcione como un sistema de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 25%, un tiempo de pico de 4 muestras y con un error en estado estacionario ante una entrada escalón unidad igual al del sistema sin controlador ($T=1$ seg).

Modelo:

$$K_p = 4 \quad K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 4 \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$M_p = 25\% \quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.25 \quad e^{-\frac{\pi\sigma}{\frac{\pi}{4}}} = 0.25 \quad e^{-4\sigma} = 0.25$$

$$\sigma = -\frac{\ln 0.25}{4} = 0.3466 \quad e^{-\sigma} = e^{-0.3466} = 0.7071$$

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 2e^{-\sigma} \cos \alpha z + e^{-2\sigma}} = \frac{k}{z^2 - 2 \cdot 0.7071 \cdot \cos \frac{\pi}{4} z + 0.5} = \frac{k}{z^2 - z + 0.5}$$

Causalidad:

$$\begin{aligned} &\text{Retardo del modelo: } 2 \\ &\text{Retardo de la planta: } 2 \\ &\text{Retardo del modelo} \geq \text{retardo de la planta} \quad 2 \geq 2 \text{ luego cumple causalidad} \end{aligned}$$

Estabilidad:

$G(z)$ tiene un cero inestable en $z = -1.2$

Los ceros inestables de $G(z)$ deben pasar a ser ceros de $M(z)$

$$M(z) = \frac{k(z + 1.2)}{z^2 - z + 0.5}$$

Causalidad:

Retardo del modelo: 1
Retardo de la planta: 2

Retardo del modelo $\geq$ retardo de la planta $1 \geq 2$ luego no cumple causalidad
Añadir un polo en el origen para que cumpla causalidad.

$$M(z) = \frac{k(z+1.2)}{z(z^2 - z + 0.5)}$$

A la vista de este modelo se deben recalcular los polos complejos del denominador para que siga cumpliendo la especificación del tiempo de pico. Observando el numerador de $M(z)$, el coeficiente de mayor valor corresponde al término independiente luego el término que va a tener mayor influencia tendrá un retardo total de tres muestras (realizando una aproximación). Como las expresiones para el cálculo del modelo corresponden a un sistema canónico con dos muestras de retardo considerar $k_p = 3$.

Nuevo modelo:

$$K_p = 3 \quad K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 3 \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$M_p = 25\% \quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.25 \quad e^{-\frac{\pi\sigma}{\frac{\pi}{3}}} = 0.25 \quad e^{-3\sigma} = 0.25$$

$$\sigma = -\frac{\ln 0.25}{3} = 0.4621 \quad e^{-\sigma} = e^{-0.4621} = 0.630$$

$$M(z) = \frac{k(z+1.2)}{z(z^2 - 2e^{-\sigma} \cos \alpha z + e^{-2\sigma})} = \frac{k(z+1.2)}{z(z^2 - 2 \cdot 0.630 \cdot \cos \frac{\pi}{3} z + 0.3969)}$$

$$M(z) = \frac{k(z+1.2)}{z(z^2 - 0.63z + 0.3969)}$$

Comportamiento estático:

Se pide un error en estado estacionario ante una entrada escalón unidad igual al del sistema sin controlador.

Para el sistema inicial el error será:

$$e_{\text{rpp}} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1.2}{z(z-0.5)(z+0.3)} = \frac{2.2}{1 \cdot 0.5 \cdot 1.3} = 3.38$$

$$e_{\text{rpp}} = \frac{1}{1 + 3.38} = 0.228$$

Para el modelo la ganancia de régimen permanente debe ser igual a $1 - e_{\text{rpp}}$ al ser la realimentación unitaria:

$$\text{ganancia} = 1 - e_{\text{rpp}} = 1 - 0.228 = 0.772$$

$$\text{ganancia} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{k(z + 1.2)}{z(z^2 - 0.63z + 0.3969)} = \frac{2.2k}{0.7669} = 0.772$$

$$k = 0.269$$

Luego el modelo final será:

$$M(z) = \frac{0.269(z + 1.2)}{z(z^2 - 0.63z + 0.3969)}$$

Y despejando el regulador:

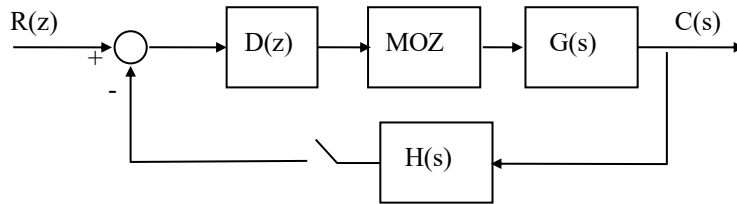
$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{M(z)}{G(z)(1 - M(z))} = \frac{\frac{0.269(z + 1.2)}{z(z^2 - 0.63z + 0.3969)}}{\frac{(z + 1.2)}{z(z - 0.5)(z + 0.3)} \left[1 - \frac{0.269(z + 1.2)}{z(z^2 - 0.63z + 0.3969)} \right]} = \\ &= \frac{\frac{0.269(z + 1.2)}{z(z^2 - 0.63z + 0.3969)}}{\frac{(z + 1.2)}{z(z - 0.5)(z + 0.3)} \left[\frac{z(z^2 - 0.63z + 0.3969) - 0.269(z + 1.2)}{z(z^2 - 0.63z + 0.3969)} \right]} = \\ &= \frac{0.269(z - 0.5)(z + 0.3)}{(z^3 - 0.63z^2 + 0.3969z - 0.269z - 0.3228)} = \\ &= \frac{0.269(z - 0.5)(z + 0.3)}{(z^3 - 0.63z^2 + 0.1279z - 0.3228)} = \end{aligned}$$

$$F(z) = \frac{0.269(z - 0.5)(z + 0.3)}{(z - 0.8922)(z^2 - 0.2622z + 0.3618)}$$

EJERCICIO 10.5

Calcular por diseño directo el regulador discreto $D(z)$ para que el sistema en lazo cerrado presente una respuesta ante entrada escalón de amplitud 5: tiempo de pico de 6 segundos, un máximo sobreimpulso del 20% y error nulo ($T=2$ seg).

$$G(z) = \frac{10(2z+1)(z+1)^3}{(z-1)(3z+1)(2z^2+z+1)}$$



Con las condiciones de régimen transitorio se obtiene:

$$t_p = K_p T = 6 \text{ seg} \quad K_p = \frac{6}{2} = 3 \quad K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 3 \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$M_p = 20\% \quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.2 \quad e^{-\frac{\pi\sigma}{\frac{\pi}{3}}} = 0.2 \quad e^{-3\sigma} = 0.2$$

$$\sigma = -\frac{\ln 0.2}{3} = 0.5365 \quad e^{-\sigma} = e^{-0.5365} = 0.5848$$

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 2e^{-\sigma} \cos \alpha z + e^{-2\sigma}} = \frac{k}{z^2 - 2 \cdot 0.5848 \cdot \cos \frac{\pi}{3} z + 0.3420}$$

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 0.5848z + 0.3420}$$

Causalidad:

Retardo del modelo: 2
Retardo de la planta: 0

Retardo del modelo $\geq$ retardo de la planta $2 \geq 0$ luego cumple causalidad

Estabilidad:

$G(z)$ no tiene polos ni ceros inestables.

Error de régimen permanente del modelo discreto nulo(al ser realimentación unitaria):

$$M(1) = 1 \quad \frac{k}{1 - 0.5848 + 0.3420} = 1 \quad k = 0.7572$$

Luego el modelo final es:

$$M(z) = \frac{0.7572}{z^2 - 0.5848z + 0.3420}$$

Despejando el regulador:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{M(z)}{G(z)(1 - M(z))} = \frac{\frac{0.7572}{z^2 - 0.5848z + 0.3420}}{\frac{10(2z+1)(z+1)^3}{(z-1)(3z+1)(2z^2+z+1)} \left[1 - \frac{0.7572}{z^2 - 0.5848z + 0.3420} \right]} = \\ &= \frac{\frac{0.7572}{z^2 - 0.5848z + 0.3420}}{\frac{10(2z+1)(z+1)^3}{(z-1)(3z+1)(2z^2+z+1)} \left[\frac{z^2 - 0.5848z + 0.3420 - 0.7572}{z^2 - 0.5848z + 0.3420} \right]} \\ &= \frac{0.07572(z-1)(3z+1)(2z^2+z+1)}{(2z+1)(z+1)^3(z^2 - 0.5848z - 0.4152)} \end{aligned}$$

EJERCICIO 10.6

Se tiene una planta definida por su función de transferencia $G(s)$ que se desea controlar en lazo cerrado mediante un regulador $D(z)$ tal que el sistema completo cumpla las siguientes condiciones ante una entrada escalón:

Debe responder produciendo un máximo sobreimpulso del 20% y un tiempo de pico de 10 segundos y en régimen permanente debe comportarse como un sistema de tipo 1.

$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.2)(s + 0.05)}$$

Calcular mediante diseño directo el regulador $D(z)$ a introducir al sistema. Sin aplicar simplicidad y sin recalculer los polos. Periodo de muestreo: 1 segundo.

$$BG(z) = \frac{z-1}{z} \sum_{\text{Polos}} \text{Res} \frac{1}{s(s-0.2)(s+0.05)} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}}$$

$$R_1 = s \frac{1}{s(s-0.2)(s+0.05)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0} = \frac{1}{-0.01} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{-100z}{z-1}$$

$$R_2 = (s-0.2) \frac{1}{s(s-0.2)(s+0.05)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0.2} = \frac{1}{0.05} \cdot \frac{z}{z-1.2214} = \frac{20z}{z-1.2214}$$

$$R_3 = (s+0.05) \frac{1}{s(s-0.2)(s+0.05)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-0.05} = \frac{1}{0.0125} \cdot \frac{z}{z-0.9512} = \frac{80z}{z-0.9512}$$

$$\begin{aligned} BG(z) &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{-100z}{z-1} + \frac{20z}{z-1.2214} + \frac{80z}{z-0.9512} \right] = \\ &= \frac{-100(z-1.2214)(z-0.9512) + 20(z-1)(z-0.9512) + 80(z-1)(z-1.2214)}{(z-1.2214)(z-0.9512)} = \end{aligned}$$

$$BG(z) = \frac{0.524z + 0.550855}{(z-1.2214)(z-0.9512)} = \frac{0.524(z+1.05125)}{(z-1.2214)(z-0.9512)}$$

Modelo:

$$t_p = 10 \text{seg} \quad t_p = K_p \cdot T \quad 10 = K_p \cdot 1 \quad K_p = 10$$

$$K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 10 \quad \alpha = \frac{\pi}{10}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} \cdot 100 = 20\% \quad e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.2 \quad e^{-10\sigma} = 0.2 \quad e^{-\sigma} = 0.2^{1/10} = 0.8513$$

$$M(z) = \frac{k}{z^2 - 2 \cdot e^{-\sigma} \cdot \cos \alpha \cdot z + e^{-2\sigma}} = \frac{k}{z^2 - 1.6193z + 0.7248}$$

La función de transferencia $BG(z)$ contiene un polo y un cero inestables. El polo inestable de $BG(z)$ debe ser raíz de $1-M(z)H(z)$ y el cero inestable de $BG(z)$ debe estar en el numerador de $M(z)$ para que la función de transferencia del regulador no contenga dichas inestabilidades. El modelo debe contener tantas incógnitas como condiciones haya que ajustar. En este caso se debe forzar la desaparición en el regulador de las dos inestabilidades existentes en $G(z)$ y se tiene además una condición de régimen permanente. Luego el modelo será:

$$M(z) = \frac{(az+b)(z+1.05125)}{z^2 - 1.6193z + 0.7248}$$

Es necesario añadir un retardo al modelo para que se siga cumpliendo la condición de causalidad.

$$M(z) = \frac{(az + b)(z + 1.05125)}{z(z^2 - 1.6193z + 0.7248)}$$

$$1 - M(z)H(z) \Big|_{z=-1.2214} = 0$$

$$1 - \frac{(az + b)(z + 1.05125)}{z(z^2 - 1.6193z + 0.7248)} \Big|_{z=-1.2214} = 0$$

$$1 - (1.2214a + b) \cdot 7.7917 = 0$$

$$9.5168a + 7.7917b = 1$$

En régimen permanente debe comportarse como un sistema tipo 1 ante una entrada escalón, esto quiere decir que el sistema debe tener error cero al escalón:

$$M(1) = 1$$

$$(a + b) \cdot 19.4431 = 1$$

$$a + b = 0.05143$$

Por tanto el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} 9.5168a + 7.7917b = 1 \\ a + b = 0.05143 \end{cases}$$

$$a = 0.3474$$

$$b = -0.2959$$

Luego el modelo final es:

$$M(z) = \frac{(0.3474z - 0.2959)(z + 1.05125)}{z(z^2 - 1.6193z + 0.7248)}$$

Y el regulador:

$$F(z) = \frac{\frac{(0.3474z - 0.2959)(z + 1.05125)}{z(z^2 - 1.6193z + 0.7248)}}{\frac{0.524(z + 1.05125)}{(z - 1.2214)(z - 0.9512)} \left[1 - \frac{(0.3474z - 0.2959)(z + 1.05125)}{z(z^2 - 1.6193z + 0.7248)} \right]} =$$

$$F(z) = \frac{\frac{0.3474(z - 0.8517)(z + 1.05125)}{z(z^2 - 1.6193z + 0.7248)}}{\frac{0.524(z + 1.06183)}{(z - 1.2214)(z - 0.9512)} \left[\frac{(z + 0.2547)(z - 0.9996)(z - 1.2218)}{z(z^2 - 1.6193z + 0.7248)} \right]} =$$

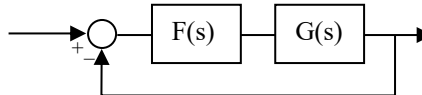
$$F(z) = \frac{0.3474(z - 0.8517)(z - 0.9512)}{0.524(z + 0.2547)(z - 0.9996)}$$

$$F(z) = \frac{0.65995(z - 0.8517)(z - 0.9512)}{(z + 0.2547)(z - 0.9996)}$$

EJERCICIO 10.7

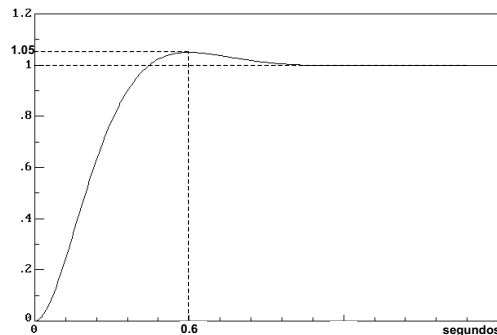
Se tiene un sistema de control continuo en lazo cerrado de un sistema cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s - 0.5)}$$



Este sistema posee un regulador continuo $F(s)$ del que se desconoce su forma. Se desea cambiar dicho sistema de control analógico por un control por computador.

Para ello antes de eliminar el regulador existente se introduce un escalón unitario en la señal de referencia y se obtiene la siguiente respuesta del sistema de lazo cerrado:



Utilizando un periodo de muestreo de 0.1 segundos diseñar el regulador discreto por el método directo para que el sistema ante una entrada escalón responda de la siguiente forma:

- en régimen transitorio como el sistema inicial continuo de lazo cerrado con regulador analógico
- en régimen permanente como el sistema inicial continuo de lazo cerrado sin utilizar ningún regulador.

No aplicar simplicidad.

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{s+3}{s(s+1)(s-0.5)} \right]$$

$$R_1 = s \cdot \frac{s+3}{s(s+1)(s-0.5)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0} = \frac{s+3}{(s+1)(s-0.5)} \cdot \frac{z}{z-e^{0.1s}} \Big|_{s=0} = -\frac{3}{0.5} \frac{z}{z-1}$$

$$R_2 = (s+1) \cdot \frac{s+3}{s(s+1)(s-0.5)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s(s-0.5)} \cdot \frac{z}{z-e^{0.1s}} \Big|_{s=-1} = \frac{2}{1.5} \frac{z}{z-0.9048}$$

$$R_3 = (s-0.5) \cdot \frac{s+3}{s(s+1)(s-0.5)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0.5} = \frac{s+3}{s(s+1)} \cdot \frac{z}{z-e^{0.1s}} \Big|_{s=0.5} = \frac{3.5}{0.75} \frac{z}{z-1.0513}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \left[-\frac{3}{0.5} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{2}{1.5} \frac{z}{z-0.9048} + \frac{3.5}{0.75} \frac{z}{z-1.0513} \right] = \\ &= \left[\frac{-3 \cdot 3 \cdot (z-0.9048)(z-1.0513) + 2(z-1)(z-1.0513) + 3.5(z-1)(z-0.9048)}{1.5(z-0.9048)(z-1.0513)} \right] = \\ &= \frac{-9(z^2 - 1.9561z + 0.9512) + 2(z^2 - 2.0513z + 1.0513) + 7(z^2 - 1.9048z + 0.9048)}{1.5(z-0.9048)(z-1.0513)} = \\ &= \frac{0.1687z - 0.1246}{1.5(z-0.9048)(z-1.0513)} \end{aligned}$$

$$G(z) = 0.1125 \frac{z-0.7386}{(z-0.9048)(z-1.0513)}$$

Modelo:

En la gráfica puede leerse:

$$\begin{aligned} t_p &= 0.6 & t_p &= K_p \cdot T & 0.6 &= K_p \cdot 0.1 & K_p &= 6 & K_p &= \frac{\pi}{\alpha} = 6 & \alpha &= \frac{\pi}{6} \\ M_p &= \frac{1.05-1}{1} = 0.05 & M_p &= e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.05 & e^{-\frac{\pi\sigma \cdot 6}{\pi}} &= 0.05 & e^{-6\sigma} &= 0.05 \\ & & e^{-\sigma} &= 0.05^{1/6} = 0.607 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{k}{z^2 - 2 \cdot e^{-\sigma} \cdot \cos \alpha \cdot z + e^{-2\sigma}} = \frac{k}{z^2 - 2 \cdot 0.607 \cdot \cos \frac{\pi}{\alpha} \cdot z + 0.607^2} \\ M(z) &= \frac{k}{z^2 - 1.0514z + 0.3684} \end{aligned}$$

Estabilidad:

$G(z)$ tiene un polo inestable, por lo tanto debe pasar a formar parte de $1-M(z)$

$$1-M(z) \Big|_{z=1.0513} = 0$$

Régimen permanente:

El sistema debe comportarse como el sistema inicial continuo de lazo cerrado sin regulador

$$y_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} M(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+3}{s^2 + 1.5s + 2.5} = 1.2$$

$$y_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} M(z) = 1.2$$

Por tanto hay que ajustar dos condiciones, una de estabilidad y otra de régimen permanente, así que es necesario añadir un polinomio de primer orden con dos incógnitas en el numerador del modelo $M(z)$:

$$M(z) = \frac{az + b}{z^2 - 1.0514z + 0.3684}$$

Causalidad:

$$\text{Retardo del modelo: } 2 - 1 = 1$$

$$\text{Retardo de la planta: } 2 - 1 = 1$$

$$\text{Retardo del modelo} \geq \text{retardo de la planta} \quad 1 \geq 1 \text{ luego cumple causalidad}$$

Aplicando las condiciones anteriores se calculan los valores de a y b :

$$1 - \frac{az + b}{z^2 - 1.0514z + 0.3684} \Big|_{z=1.0513} = 0 \quad 1.0513a + b = 0.3683$$

$$y_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{az + b}{z^2 - 1.0514z + 0.3684} = \frac{a + b}{0.317} = 1.2 \quad a + b = 0.3804$$

Luego el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} 1.0513a + b = 0.3683 \\ a + b = 0.3804 \end{cases}$$

$$a = -0.2359$$

$$b = 0.6163$$

Por tanto el modelo final es:

$$M(z) = \frac{-0.2359z + 0.6163}{z^2 - 1.0514z + 0.3684}$$

Y despejando el regulador:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{M(z)}{G(Z)[1 - M(z)]} = \frac{\frac{-0.2359z + 0.6163}{z^2 - 1.0514z + 0.3684}}{\frac{0.1125(z - 0.7386)}{(z - 0.9048)(z - 1.0513)} \left[1 - \frac{-0.2359z + 0.6163}{z^2 - 1.0514z + 0.3684} \right]} = \\
 &= \frac{\frac{-0.2359z + 0.6163}{z^2 - 1.0514z + 0.3684}}{\frac{0.1125(z - 0.7386)}{(z - 0.9048)(z - 1.0513)} \left[\frac{z^2 - 1.0514z + 0.3684 + 0.2359z - 0.6163}{z^2 - 1.0514z + 0.3684} \right]} = \\
 &= \frac{\frac{-0.2359z + 0.6163}{z^2 - 1.0514z + 0.3684}}{\frac{0.1125(z - 0.7386)}{(z - 0.9048)(z - 1.0513)} \left[\frac{z^2 - 0.8155z - 0.2479}{z^2 - 1.0514z + 0.3684} \right]} = \\
 &= \frac{\frac{0.2359(2.6125 - z)}{z^2 - 1.0514z + 0.3684}}{\frac{0.1125(z - 0.7386)}{(z - 0.9048)(z - 1.0513)} \left[\frac{(z + 0.2358)(z - 1.0513)}{z^2 - 1.0514z + 0.3684} \right]} \\
 &\quad \left| F(z) = \frac{2.0969(2.6125 - z)(z - 0.9048)}{(z - 0.7386)(z + 0.2358)} \right|
 \end{aligned}$$