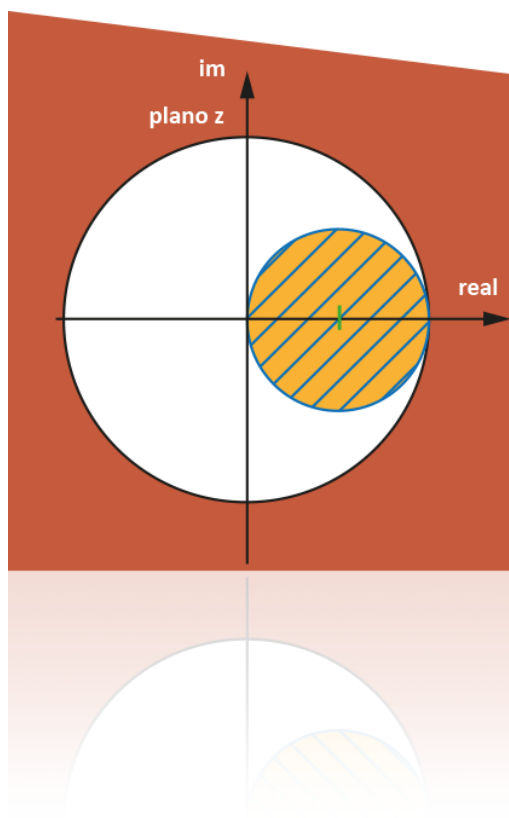


Control por computador

Ejercicios 12



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 12.1

Para el sistema del ejercicio 11.1 diseñar un compensador de retardo de fase en el dominio de la frecuencia tal que mantenga el error de régimen permanente y presente un margen de fase de 45° .

El cálculo del equivalente discreto de $GH(s)$ se puede ver en el ejercicio 4.8:

$$GH(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{6.931}{s(s + 6.931)} \right] = \frac{0.028(z + 0.793)}{(z - 1)(z - 0.5)}$$

$$A(z)GH(z) = 100 \frac{0.028(z + 0.793)}{(z - 1)(z - 0.5)} = \frac{2.8(z + 0.793)}{(z - 1)(z - 0.5)}$$

El cálculo del diagrama de Bode puede verse en el ejercicio 11.1:

$$FTLA(z) = \frac{100.299 \left(1 + \frac{jv}{173.237} \right) \left(1 + \frac{jv}{20} \right)}{jv \left(1 + \frac{jv}{6.667} \right)}$$

El margen de fase inicial y la frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica:

$$MF = -28.69^\circ \quad v_a = 33.41 \text{ rad/seg}$$

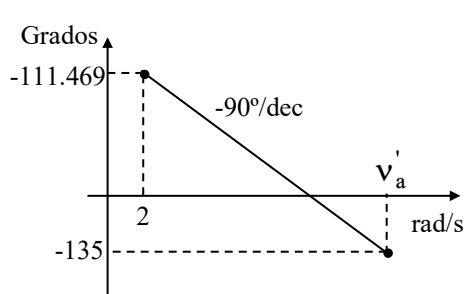
El nuevo margen de fase ha de ser 45° , lo que corresponde con una fase para el punto de amplitud crítica de $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$

La frecuencia a la que el sistema presenta una fase de 135° será la nueva v'_a :

$$\varphi(v = v'_a) = -135^\circ$$

$$\varphi(v = v'_a) = \varphi(v = 2 \text{ rad/seg}) - 90 \log \frac{v'_a}{2}$$

En el ejercicio 11.1 puede verse que la fase $\varphi(v = 2 \text{ rad/seg}) = -111.469^\circ$ y a partir de ese punto la curva cae con una pendiente de $-90^\circ/\text{dec}$.



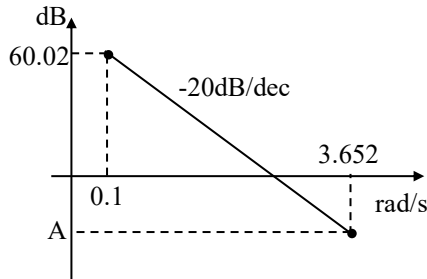
$$\varphi(v = v'_a) = -111.469^\circ - 90 \log \frac{v'_a}{2} = -135^\circ$$

$$v'_a = 2 \cdot 10^{\frac{135 - 111.469}{90}}$$

$$v'_a = 3.652 \text{ rad/seg}$$

A esta nueva frecuencia de amplitud crítica le corresponde una amplitud de:

$$A(\nu = \nu'_a) = A(\nu = 3.652 \text{ rad/seg}) = A(\nu = 0.1 \text{ rad/seg}) - 20 \log \frac{3.652}{0.1}$$



En el ejercicio 11.1 puede verse que la amplitud $A(\nu = 0.1 \text{ rad/seg}) = 60.02 \text{ dB}$ y a partir de ese punto la curva cae con una pendiente de -20 dB/dec .

$$A(\nu = 3.652 \text{ rad/seg}) = 60.02 - 31.251 = 28.769 \text{ dB}$$

La red de retardo debe proporcionar una atenuación igual a la ganancia del sistema para la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$28.769 = 20 \log \beta \quad \beta = 10^{\frac{28.769}{20}}$$

$$\beta = 27.444$$

Eligiendo el cero de la red de retardo una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia:

$$\frac{\nu'_a}{10} = \frac{3.652}{10} = 0.3652 \quad \frac{1}{T} = 0.3652$$

$$T = 2.73$$

$$\beta T = 27.444 \cdot 2.73$$

$$\beta T = 75.142$$

La red será:

$$D(w) = \frac{1 + wT}{1 + w\beta T} = \frac{1 + 2.738w}{1 + 75.142w}$$

Deshaciendo el cambio:

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 20 \frac{z-1}{z+1}$$

$$D(z) = \frac{1 + 2.738 \cdot 20 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 75.142 \cdot 20 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1 + 2.738 \cdot 20(z-1)}{z+1 + 75.142 \cdot 20(z-1)} = \frac{(1 + 54.76)z - 5.76 + 1}{(1 + 1502.84)z - 1502.84 + 1}$$

$$D(z) = \frac{55.76z - 53.76}{1503.84z - 1501.84}$$

EJERCICIO 12.2

Diseñar un compensador de retardo de fase en el dominio frecuencial, tal que se mejore el error en la respuesta estacionaria en un 50% y el margen de fase sea de 45°.

$$G(z) = \frac{0.368(z + 0.7174)}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

Ver ejercicio 11.3 para el cálculo de la respuesta frecuencial del sistema.

$$G(w) = \frac{(1 + 0.082w)(1 - 0.5w)}{w(1 + 1.082w)}$$

$$G(jv) = \frac{\left(1 + \frac{jv}{12.154}\right)\left(1 - \frac{jv}{2}\right)}{jv\left(1 + \frac{jv}{0.924}\right)}$$

Amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$A(v = 0.01 \text{ rad/seg}) = 40 \text{ dB}$$

$$A(v = 0.924 \text{ rad/seg}) = 0.6866 \text{ dB}$$

$$A(v = 2 \text{ rad/seg}) = -12.7277 \text{ dB}$$

$$A(v = 12.154 \text{ rad/seg}) = -28.4015 \text{ dB}$$

Frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica: $v_a = 0.9613 \text{ rad/seg}$

Frecuencia correspondiente al punto de fase crítica: $v_f = 1.5205 \text{ rad/seg}$

Márgenes iniciales de fase MF y de ganancia MG:

$$MF = 13.5443^\circ$$

$$MG = -7.966 \text{ dB}$$

Para la mejora de la respuesta de régimen permanente, como el sistema de lazo abierto es de tipo 1, el error que se puede mejorar será ante la entrada rampa.

Se añadirá una ganancia tal que el error se reduzca un 50%.

El error ante entrada rampa del sistema inicial es:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.368(z+0.7174)}{(z-1)(z-0.368)} = \frac{0.632}{0.632} = 1$$

$$e_{rp} = \frac{1}{K_v} = 1$$

Si se desea una mejora de un 50%:

$$e_{rp} = \frac{1}{K'_v} = 0.5 \quad K'_v = 2$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot K \cdot G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot K \frac{0.368(z+0.7174)}{(z-1)(z-0.368)} = \frac{0.632K}{0.632} = K$$

$$\boxed{K = 2}$$

Luego una vez corregido el error de régimen permanente la función de transferencia del sistema será:

$$G(jv) = \frac{2 \left(1 + \frac{jv}{12.154} \right) \left(1 - \frac{jv}{2} \right)}{jv \left(1 + \frac{jv}{0.924} \right)}$$

El diagrama de amplitud se verá desplazado hacia arriba en $20\log 2 = 6.0206$ dB, que corresponde a la ganancia añadida.

Por tanto los nuevos valores para la amplitud en los puntos de intersección de las asíntotas serán:

$$A(v = 0.01 \text{ rad / seg}) = 20(\log 2 - \log 0.01) = 46.0206 \text{ dB}$$

$$A(v = 0.924 \text{ rad / seg}) = 0.6866 + 6.0206 = 6.7020 \text{ dB}$$

$$A(v = 2 \text{ rad / seg}) = -12.7277 + 6.0206 = -6.7071 \text{ dB}$$

$$A(v = 12.154 \text{ rad / seg}) = -28.4015 + 6.0206 = -22.3809 \text{ dB}$$

El diagrama de fase no se modifica. Fases en los puntos de intersección de las asíntotas:

$$\varphi(v \leq 0.0924 \text{ rad / seg}) = -90^\circ$$

$$\varphi(v = 0.2 \text{ rad / seg}) = -105.0911^\circ$$

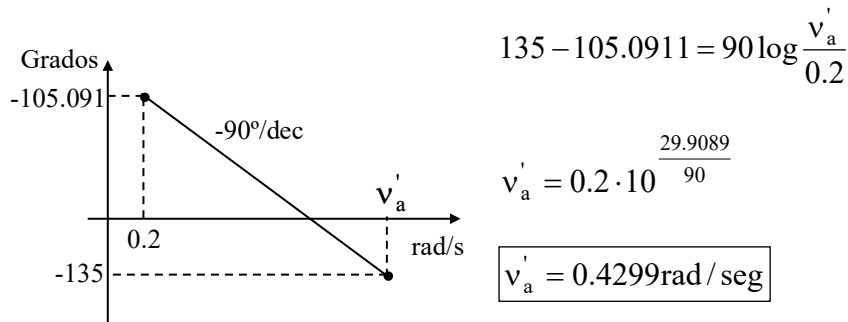
$$\varphi(v = 1.2154 \text{ rad / seg}) = -175.6231^\circ$$

$$\varphi(v = 9.24 \text{ rad / seg}) = -215.266^\circ$$

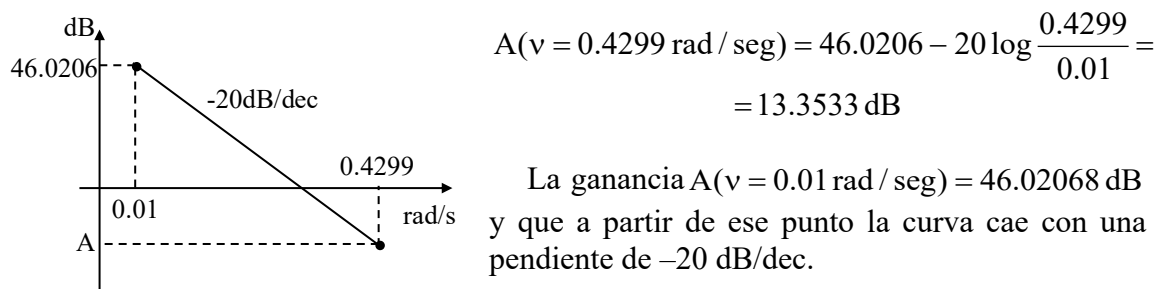
$$\varphi(v = 20 \text{ rad / seg}) = -215.266^\circ$$

$$\varphi(v \geq 121.54 \text{ rad / seg}) = -180^\circ$$

Se desea que el nuevo margen de fase sea de 45° , por lo que la frecuencia correspondiente a ese margen de fase, $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$, se considerará como la nueva frecuencia de amplitud crítica:



A esta nueva frecuencia, le corresponde inicialmente un valor en la curva de módulo de:



La red de retardo debe proporcionar una atenuación de dicho valor para que la curva de módulo pase por 0 dB para la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$13.3533 = 20 \log \beta \quad \beta = 10^{\frac{13.3533}{20}}$$

$$\beta = 4.6523$$

Situando el cero de la red de retardo una década por debajo de la nueva frecuencia de amplitud crítica, queda:

$$\frac{1}{T} = \frac{v'_a}{10} = 0.04299 \quad T = 23.2612$$

Por tanto el regulador completo será:

$$D(w) = \frac{1 + wT}{1 + w\beta T} = \frac{1 + 23.2612w}{1 + 23.2612 \cdot 4.6523w} = \frac{1 + 23.2612w}{1 + 108.2182w}$$

Se obtiene la forma del regulador discreto deshaciendo el cambio de la transformación bilineal:

$$z = \frac{1 + \frac{w}{2}}{1 - \frac{w}{2}} \rightarrow w = 2 \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$D(z) = \frac{1 + 23.2612 \cdot 2 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 108.2182 \cdot 2 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1 + 46.5224(z-1)}{z+1 + 216.4364(z-1)} = \frac{47.5224z - 45.5224}{217.4364z - 215.4364}$$

$$D(z) = 0.2113 \frac{1.0439z - 1}{1.0093z - 1}$$

EJERCICIO 12.3

Para el sistema del ejercicio 11.4 se desea diseñar una red de retardo de fase digital $D(z)$, en base a la respuesta frecuencial del sistema discreto, tal que el sistema con regulador presente un comportamiento con un margen de fase de 45° .

En el ejercicio 11.4, donde pueden verse los cálculos y la respuesta frecuencial del sistema inicial sin regulador, se llega a la siguiente función de transferencia del sistema:

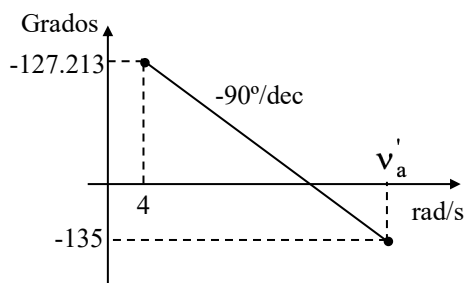
$$G(jv) = \frac{23.3745 \left(1 + \frac{jv}{829.0434} \right) \left(1 - \frac{jv}{40} \right)}{jv \left(1 + \frac{jv}{5.9586} \right)}$$

La frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica y el margen de fase inicial son los siguientes:

$$v_a = 11.8016 \text{ rad/seg} \quad \text{MF} = 10.5^\circ$$

Se desea que el nuevo margen de fase sea de 45° , por lo que la frecuencia correspondiente a ese margen de fase, $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$, se considerará como la nueva frecuencia de amplitud crítica.

En el ejercicio 11.4 puede verse que la fase $\varphi(v = 4 \text{ rad/seg}) = -127.2132^\circ$ y a partir de ese punto la fase cae con una pendiente de $90^\circ/\text{dec}$.

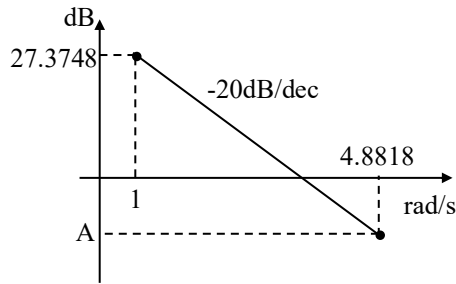


$$135 - 127.2132 = 90 \log \frac{v'_a}{4}$$

$$v'_a = 4 \cdot 10^{\frac{7.7868}{90}}$$

$$v'_a = 4.8818 \text{ rad/seg}$$

A esta nueva frecuencia, le corresponde inicialmente un valor en la curva de módulo de:



$$A(\nu = 4.8818 \text{ rad/seg}) = 27.3748 - 20 \log \frac{4.8818}{1} = 27.3748 - 13.7716 = 13.6032 \text{ dB}$$

En el ejercicio 11.4 puede verse que la ganancia $A(\nu = 1 \text{ rad/seg}) = 27.3748 \text{ dB}$ y que a partir de ese punto la curva cae con una pendiente de -20 dB/dec .

La red de retardo debe proporcionar una atenuación de dicho valor para que la curva de módulo pase por 0 dB para la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$13.6032 = 20 \log \beta \quad \beta = 10^{\frac{13.6032}{20}}$$

$$\boxed{\beta = 4.7881}$$

Eligiendo el cero de la red de retardo una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia:

$$\frac{\nu'_a}{10} = \frac{4.8818}{10} = 0.4882$$

$$\frac{1}{T} = 0.4882 \quad \boxed{T = 2.0483}$$

$$\beta T = 4.7881 \cdot 2.0483 \quad \boxed{\beta T = 9.8075}$$

La red será:

$$D(w) = \frac{1 + wT}{1 + w\beta T} = \frac{1 + 2.0483w}{1 + 9.8075w}$$

Deshaciendo el cambio:

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 40 \frac{z-1}{z+1}$$

$$D(w) = \frac{1 + 2.0483 \cdot 40 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 9.8075 \cdot 40 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1 + 81.932z - 81.932}{z+1 + 392.3z - 392.3} = \frac{82.932z - 80.932}{393.3z - 391.3} =$$

$$D(z) = \frac{82.932}{393.3} \frac{z - 0.9759}{z - 0.9949}$$

$$\boxed{D(z) = 0.2109 \frac{z - 0.9759}{z - 0.9949}}$$

EJERCICIO 12.4

Sustituir en el ejercicio 12.3 la red de retardo de fase digital por una red de avance digital para obtener las mismas especificaciones de margen de fase -de 45° .

El margen de fase inicial es de 10.5° , por tanto el incremento de fase que debe introducir la red será:

$$\Delta MF = (45^\circ - 10.5^\circ) + \text{coeficiente de seguridad} = 34.5^\circ + 5.5^\circ = 40^\circ$$

El máximo incremento que puede introducir la red de adelanto de fase deberá ser igual al incremento en fase necesario para que el sistema alcance el margen de fase pedido:

$$\Delta MF = \Phi_m \quad \Phi_m = 45 \log \frac{1}{\alpha}$$

luego

$$40 = 45 \log \frac{1}{\alpha} \quad \alpha = \frac{1}{\frac{40}{10^{45}}} \quad \boxed{\alpha = 0.1292}$$

La nueva frecuencia de amplitud crítica será aquella a la que el sistema sin compensar tiene una atenuación la mitad de la atenuación introducida por la red. La atenuación introducida por la red es:

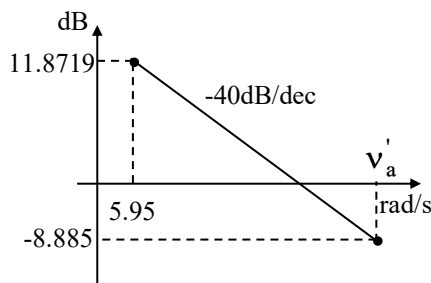
$$20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{1}{0.1292} = 17.77 \text{ dB}$$

Se calcula ahora el valor de la frecuencia donde el sistema presenta una atenuación de

$$\frac{17.77}{2} = 8.885 \text{ dB}$$

Es decir, buscamos el valor de frecuencia donde la amplitud es de -8.885 dB .

En el ejercicio 11.4 puede verse que la ganancia $A(\nu = 5.9586 \text{ rad/seg}) = 11.8719 \text{ dB}$ y que a partir de ese punto la curva del módulo cae con una pendiente de -40 dB/dec .



$$11.8719 + 8.885 = 40 \log \frac{\nu'_a}{5.95}$$

$$\nu'_a = 5.95 \cdot 10^{\frac{20.7569}{40}}$$

$$\boxed{\nu'_a = 19.6535 \text{ rad/s}}$$

Se fuerza ahora, a que el máximo avance de fase de la red Φ_m coincida con la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$\nu'_a = \nu_m \quad \nu_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

$$19.6535 = \frac{1}{T\sqrt{0.1292}} \quad T = \frac{1}{19.6535\sqrt{0.1292}} \quad \boxed{T = 0.1416}$$

Al modelo se le inserta un amplificador de ganancia $\frac{1}{\alpha}$ para eliminar la atenuación producida por el compensador. Luego el modelo del regulador será:

$$D(jv) = \alpha \frac{1 + jvT}{1 + jv\alpha T} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$D(jv) = \frac{1 + 0.1416jv}{1 + 0.1292 \cdot 0.1416jv} = \frac{1 + 0.1416jv}{1 + 0.0183jv}$$

$$D(w) = \frac{1 + 0.1416w}{1 + 0.0183w}$$

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} = 40 \frac{z-1}{z+1}$$

$$D(z) = \frac{1 + 0.1416 \cdot 40 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 0.0183 \cdot 40 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1 + 5.664z - 5.664}{z+1 + 0.732z - 0.732} = \frac{6.664z - 4.664}{1.732z - 0.268}$$

$$\boxed{D(z) = 3.8476 \frac{z - 0.6999}{z - 0.1547}}$$

EJERCICIO 12.5

Para el sistema del ejercicio 11.5 se desea hacer un ensayo sobre él tal que si la entrada del sistema es un escalón unitario, el sistema de lazo cerrado se comporte dando oscilaciones mantenidas a la salida. Calcular utilizando la respuesta frecuencial el regulador necesario más sencillo, así como la frecuencia real de oscilación.

El diagrama de bloques, la respuesta frecuencial y las condiciones de estabilidad del sistema se pueden ver en el ejercicio 11.5.

$$A \cdot GH(z) = 0.047 \frac{z + 0.9787}{z^2 - 1.843z + 0.8523}$$

$$A \cdot GH(w) = \frac{-0.0002709 \cdot (w - 19.9980)(w + 1858.1201)}{w^2 + 1.5987w + 1.006602}$$

$$A \cdot GH(jv) = \frac{10 \cdot \left(1 - \frac{jv}{20}\right) \left(1 + \frac{jv}{1858}\right)}{1 + 1.5882jv + \left(\frac{jv}{1}\right)^2}$$

La frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica: $v_a = 3.16 \text{ rad/seg}$

La frecuencia correspondiente al punto de fase crítica: $v_f = 5.85 \text{ rad/seg}$

Márgenes de fase y ganancia:

$$\begin{aligned} MF &= 36.08^\circ \text{ estable} \\ MG &= -10.69 \text{ dB estable} \end{aligned}$$

Será necesario introducir un controlador proporcional de valor igual al margen de ganancia del sistema para así llevar al sistema al límite de estabilidad, donde la respuesta del sistema será oscilante cuando la entrada sea un escalón unitario.

$$10.69 = 20 \log k \quad \boxed{k = 3.42}$$

La frecuencia de oscilación será la correspondiente al punto de fase crítica:
 $v_f = 5.85 \text{ rad/seg}$

Esta frecuencia es ficticia, para calcular el valor real, se ha de deshacer la transformación realizada:

$$v = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$
$$5.85 = \frac{2}{0.1} \operatorname{tg} \frac{\omega \cdot 0.1}{2} \quad 0.2925 = \operatorname{tg} 0.05\omega \quad \arctg 0.2925 = 0.05\omega$$

$$\boxed{\omega = 5.69 \text{ rad/s}}$$

EJERCICIO 12.6

Para el ejercicio 12.5, sustituir el regulador calculado por una red de avance de fase tal que el sistema compensado presente un margen de fase de 55° . Dibujar el diagrama de Bode del sistema compensado. ¿Cumple las especificaciones? Coeficiente de seguridad 6° .

El diagrama de bloques, la respuesta frecuencial y las condiciones de estabilidad del sistema se pueden ver en el ejercicio 11.5.

$$A \cdot GH(jv) = \frac{10 \cdot \left(1 - \frac{jv}{20}\right) \left(1 + \frac{jv}{1858}\right)}{1 + 1.5882jv + \left(\frac{jv}{1}\right)^2}$$

La frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica y el margen de fase inicial se indican a continuación:

$$v_a = 3.16 \text{ rad/seg} \quad \text{MF} = 36.08^\circ \text{ estable.}$$

Por tanto, habrá que aumentar dicho margen hasta los 55° pedidos.

Para ello calculamos el incremento necesario en el margen de fase:

$$\Delta \text{MF} = (55^\circ - 36.08) + \text{coeficiente de seguridad} = (55^\circ - 36.08) + 6^\circ = 24.92^\circ \approx 25^\circ$$

El máximo incremento que puede introducir la red de adelanto de fase deberá ser igual al incremento en fase necesario para que el sistema alcance el margen de fase pedido:

$$\Delta \text{MF} = \Phi_m$$

$$\Phi_m = 45 \log \frac{1}{\alpha}$$

luego

$$25 = 45 \log \frac{1}{\alpha} \quad \alpha = \frac{1}{10^{\frac{25}{45}}} \quad \boxed{\alpha = 0.278}$$

La nueva frecuencia de amplitud crítica será aquella a la que el sistema sin compensar tiene una atenuación la mitad de la atenuación introducida por la red. La atenuación introducida por la red es:

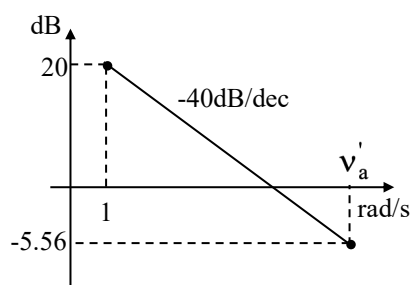
$$20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{1}{0.278} = 11.1 \text{ dB}$$

Se calcula ahora el valor de la frecuencia donde el sistema presenta una atenuación de

$$\frac{11.11}{2} = 5.56 \text{ dB}$$

Es decir, buscamos el valor de frecuencia donde la amplitud es de -5.56 dB .

En el ejercicio 11.5 puede verse que el módulo $A(v = 1 \text{ rad/seg}) = 20 \text{ dB}$ y que a partir de ese valor de frecuencia la curva cae con una pendiente de -40 dB/dec .



$$20 + 5.56 = 40 \log \frac{v'_a}{1}$$

$$v'_a = 10^{\frac{25.56}{40}}$$

$$\boxed{v'_a = 4.36 \text{ rad/s}}$$

Se fuerza ahora, a que el máximo avance de fase de la red Φ_m coincida con la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$v_a' = v_m \quad v_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

$$4.36 = \frac{1}{T\sqrt{0.278}} \quad T = \frac{1}{4.36\sqrt{0.278}} \quad \boxed{T = 0.435}$$

Al modelo se le inserta un amplificador de ganancia $\frac{1}{\alpha}$ para eliminar la atenuación producida por el compensador. Luego el modelo del regulador será:

$$G(jv) = \alpha \frac{1 + jvT}{1 + jv\alpha T} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$G(jv) = \frac{1 + 0.435jv}{1 + 0.278 \cdot 0.435jv} = \frac{1 + 0.435jv}{1 + 0.121jv}$$

$$G(w) = \frac{1 + 0.435w}{1 + 0.121w}$$

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} = 20 \frac{z-1}{z+1}$$

$$G(z) = \frac{1 + 0.435 \cdot 20 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 0.121 \cdot 20 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1+8.7z-8.7}{z+1+2.42z-2.42} = \frac{9.7z-7.7}{3.42z-1.42}$$

$$\boxed{D(z) = 2.84 \frac{z-0.79}{z-0.42}}$$

EJERCICIO 12.7

Para el sistema del ejercicio 11.6 considerando $D(z)=34$, diseñar una red de retardo de fase tal que el sistema manteniendo el error de régimen permanente anterior tenga un margen de fase de 45° .

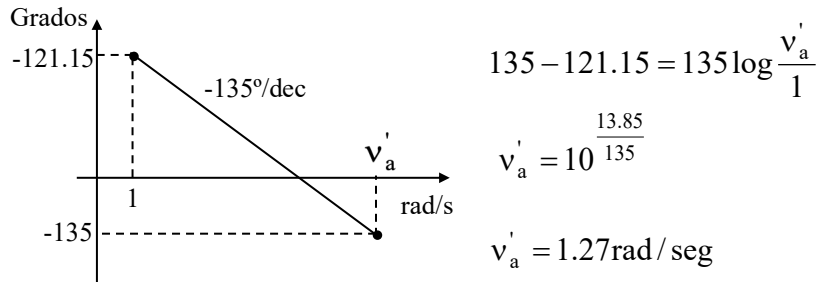
La función de transferencia $GH(jv)$ obtenida en el ejercicio 11.6 es:

$$G(jv) = 32.3 \frac{\left(1 + \frac{jv}{272}\right) \left(1 - \frac{jv}{10}\right)}{\left(1 + \frac{jv}{1}\right) \left(1 + \frac{jv}{0.2}\right)}$$

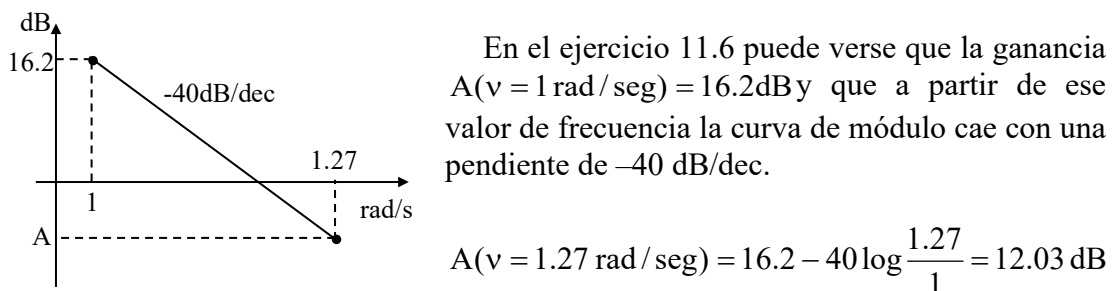
Frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica y el margen de fase inicial son los indicados a continuación:

$$v_a = 2.54 \text{ rad/seg} \quad MF = 8.57^\circ.$$

Se desea que el nuevo margen de fase sea de 45° , por lo que la frecuencia correspondiente a ese margen de fase, $-180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$, se considerará como la nueva frecuencia de amplitud crítica:



A esta nueva frecuencia v'_a , le corresponde inicialmente un valor en la curva de módulo de:



La red de retardo debe proporcionar una atenuación de dicho valor para que la curva de módulo pase por 0dB para la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$12.03 = 20 \log \beta \quad \beta = 10^{\frac{12.03}{20}}$$

$$\boxed{\beta = 3.99}$$

Eligiendo el cero de la red de retardo una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia:

$$\frac{v'_a}{10} = \frac{1.27}{10} = 0.127 \quad \frac{1}{T} = 0.127 \quad \boxed{T = 7.87}$$

$$\beta T = 3.99 \cdot 7.87 \quad \boxed{\beta T = 31.40}$$

La red será:

$$D(w) = \frac{1 + wT}{1 + w\beta T} = \frac{1 + 7.87w}{1 + 31.40w}$$

Deshaciendo el cambio:

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} = 10 \frac{z-1}{z+1}$$

$$D(w) = \frac{1 + 7.87 \cdot 10 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 31.40 \cdot 10 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1 + 78.7z - 78.7}{z+1 + 314z - 314} = \frac{79.7z - 77.7}{315z - 313} = \frac{79.7(z - 0.9749)}{315(z - 0.9937)}$$

$$D(z) = 0.253 \frac{z - 0.9749}{z - 0.9937}$$

EJERCICIO 12.8

Al sistema del ejercicio 11.7 se le introduce en cadena directa un regulador de avance de fase para que el sistema presente un margen de fase de 45°. Hallar la función de transferencia de dicho regulador.

La función de transferencia GH(jv) obtenida en el ejercicio 11.7 es:

$$GH'(jv) \approx \frac{19 \left(1 + \frac{jv}{272}\right) \left(1 - \frac{jv}{10}\right)}{\left(1 + \frac{jv}{1}\right) \left(1 + \frac{jv}{0.2}\right)}$$

Frecuencia correspondiente al punto de amplitud crítica y el margen de fase inicial son los indicados a continuación:

$$v_a = 1.9494 \text{ rad/seg} \quad \text{MF} = 19.41^\circ$$

Por tanto, habrá que aumentar dicho margen hasta los 45° pedidos. Para ello calculamos el incremento necesario en el margen de fase:

$$\Delta \text{MF} = (45^\circ - 19.41) + \text{coeficiente de seguridad} = 25.59^\circ + 6^\circ = 31.59^\circ$$

El máximo incremento que puede introducir la red de adelanto de fase deberá ser igual al incremento en fase necesario para que el sistema alcance el margen de fase pedido:

$$\Delta \text{MF} = \Phi_m$$

$$\Phi_m = 45 \log \frac{1}{\alpha}$$

luego

$$31.59 = 45 \log \frac{1}{\alpha} \quad \alpha = \frac{1}{10^{\frac{31.59}{45}}} \quad \boxed{\alpha = 0.1986}$$

La nueva frecuencia de amplitud crítica será aquella a la que el sistema sin compensar tiene una atenuación la mitad de la atenuación introducida por la red. La atenuación introducida por la red es:

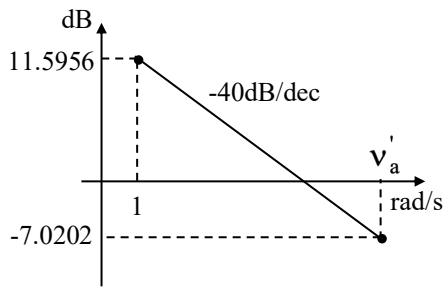
$$20 \log \frac{1}{\alpha} = 20 \log \frac{1}{0.1986} = 14.0404 \text{ dB}$$

Se calcula ahora el valor de la frecuencia donde el sistema presenta una atenuación de

$$\frac{14.0404}{2} = 7.0202 \text{ dB}$$

Es decir, buscamos el valor de frecuencia donde la amplitud es de -7.0202 dB .

En el ejercicio 11.7 puede verse que el módulo $A(v = 1 \text{ rad/seg}) = 11.5956 \text{ dB}$ y que a partir de ese valor de frecuencia la curva cae con una pendiente de -40 dB/dec .



$$11.5956 + 7.0202 = 40 \log \frac{v'_a}{1}$$

$$v'_a = 10^{\frac{18.6158}{40}}$$

$$v'_a = 2.9201 \text{ rad/s}$$

Se fuerza ahora, a que el máximo avance de fase de la red Φ_m coincida con la nueva frecuencia de amplitud crítica:

$$v'_a = v_m$$

$$v_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

$$2.9201 = \frac{1}{T\sqrt{0.1986}}$$

$$T = \frac{1}{2.9201\sqrt{0.1986}}$$

$$T = 0.7684$$

Al modelo se le inserta un amplificador de ganancia $\frac{1}{\alpha}$ para eliminar la atenuación producida por el compensador para las bajas frecuencias. Luego el modelo del regulador será:

$$G(jv) = \alpha \frac{1 + jvT}{1 + jv\alpha T} \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$G(jv) = \frac{1 + 0.7684jv}{1 + 0.1986 \cdot 0.7684jv} = \frac{1 + 0.7684jv}{1 + 0.1526jv}$$

$$G(w) = \frac{1 + 0.7684w}{1 + 0.1526w}$$

$$w = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} = 10 \frac{z-1}{z+1}$$

$$G(z) = \frac{1 + 0.7684 \cdot 10 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 0.1526 \cdot 10 \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1 + 7.684z - 7.684}{z+1 + 1.526z - 1.526} = \frac{8.684z - 6.684}{2.526z - 0.526}$$

$$D(z) = 3.4378 \frac{z - 0.7697}{z - 0.2082}$$

