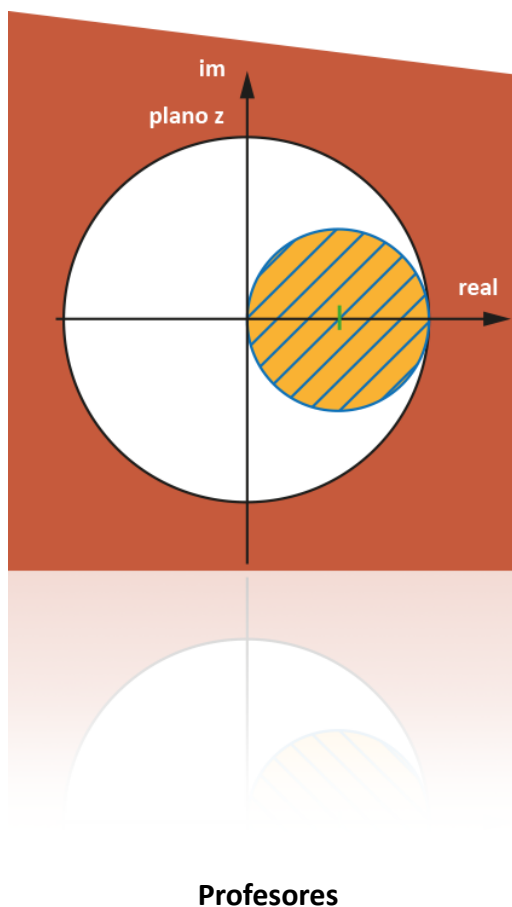


Control por computador

Ejercicios 4



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

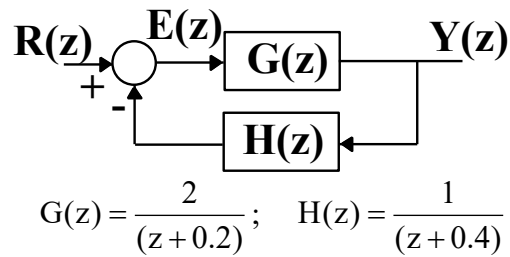
María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 4.1

Calcular los coeficientes estáticos de error para el sistema siguiente ($T=1$ seg):



- Entrada escalón unidad (posición):
$$e_{p\infty} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)H(z)$$

Para el sistema:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2}{(z+0.2)(z+0.4)} = \frac{2}{1.2 * 1.4} = 1.19$$

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 1.19} = 0.46$$

Tipo 0 Error Constante ante Escalón.

- Entrada Rampa unidad (velocidad):
$$e_{v\infty} = \frac{T}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)H(z)$$

Para el sistema:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{2}{(z+0.3)(z+0.4)} = 0$$

$$e_{v\infty} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

Tipo 0 Error Infinito ante Rampa.

- Entrada Parabólica (aceleración):
$$e_{a\infty} = \frac{T^2}{K_a}$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)H(z)$$

Para el sistema:

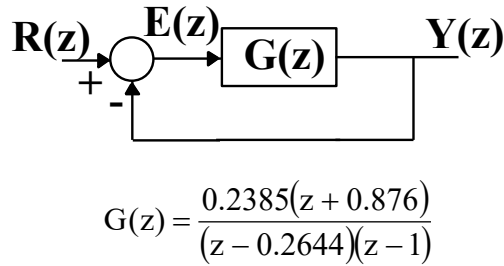
$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{2}{(z+0.3)(z+0.4)} = 0$$

$$e_{a\infty} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

Tipo 0 Error Infinito ante Aceleración.

EJERCICIO 4.2

Calcular los coeficientes estáticos de error para el sistema siguiente:
(T=1 seg.)



- Error de posición:

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1 + K_p}; \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.2385(z + 0.876)}{(z - 0.2644)(z - 1)} = \infty$$

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1 + \infty} = 0 \quad \text{Tipo 1 Error Nulo ante Escalón.}$$

- Error de velocidad:

$$e_{v\infty} = \frac{1}{K_v}; \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z)$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{0.2385(z + 0.876)}{(z - 0.2644)(z - 1)} = 0.6$$

$$e_{v\infty} = \frac{T}{0.6} = 1.66 \quad \text{Tipo 1 Error Constante ante Rampa.}$$

- Error de aceleración:

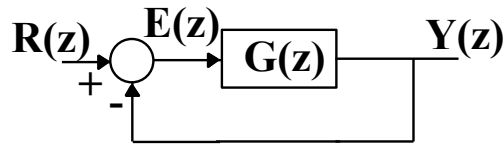
$$e_{a\infty} = \frac{T^2}{K_a}; \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 G(z)$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 \frac{0.2385(z + 0.876)}{(z - 0.2644)(z - 1)} = 0$$

$$e_{a\infty} = \frac{1}{0} = \infty \quad \text{Tipo 1 Error Infinito ante Aceleración.}$$

EJERCICIO 4.3

Calcular los errores de estado estacionario del siguiente sistema. (T=1seg)



$$G(z) = \frac{8}{(z-1)^2(z+1)(z+.8)}$$

- Error de posición:

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1+K_p}; \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{8}{(z-1)^2(z+1)(z+.8)} = \infty$$

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

Tipo 2 Error Nulo ante Escalón.

- Error de velocidad:

$$e_{v\infty} = \frac{1}{K_v}; \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{8}{(z-1)^2(z+1)(z+.8)} = \infty$$

$$e_{v\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Tipo 2 Error Nulo ante Rampa.

- Error de aceleración:

$$e_{a\infty} = \frac{1}{K_a}; \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$$

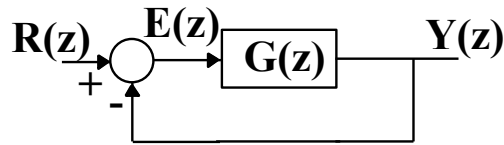
$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{8}{(z-1)^2(z+1)(z+.8)} = 4.04$$

$$e_{a\infty} = \frac{1}{4.04} = 0.24$$

Tipo 1 Error Constante ante Aceleración

EJERCICIO 4.4

Calcular el valor de K en el sistema siguiente para que el error en régimen permanente sea menor o igual a 0.1, al aplicar la entrada: $r_k = 1 + k$.



$$G(z) = \frac{K}{(z-1)(z+.6)(z-.5)}$$

Entrada: $r_k = 1 + k$;

Lineal: $e_{\infty} = e_{p\infty} + e_{v\infty}$

- Escalón:

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1 + K_p} ; \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K}{(z-1)(z+.6)(z-.5)} = \infty$$

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

- Rampa:

$$e_{v\infty} = \frac{1}{K_v} ; \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{K}{(z-1)(z+.6)(z-.5)} = \frac{K}{0.8}$$

$$e_{v\infty} = \frac{1}{K/0.8} = \frac{0.8}{K}$$

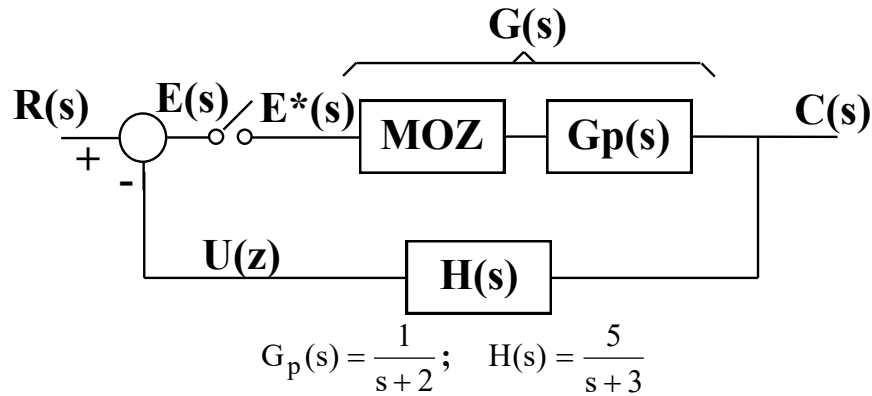
Error total: $e_{\infty} = e_{p\infty} + e_{v\infty}$

$$0.1 = 0 + \frac{0.8}{K}$$

$$\boxed{K \geq 8}$$

EJERCICIO 4.5

Calcular los errores de estado estacionario del siguiente sistema.



$$E(s) = R(s) - U(s) \rightarrow E(z) = R(z) - U(z)$$

$$C(s) = G(s)E^*(s) \rightarrow C(z) = G(z)E(z)$$

$$U(s) = G(s)H(s)E^*(s) \rightarrow U(z) = GH(z)E(z)$$

$$E(z) = R(z) - GH(z)E(z)$$

$$E(z) = \frac{R(z)}{1+GH(z)}$$

$$GH(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s)H(s)\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)H(s)}{s}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{5}{s(s+2)(s+3)}\right]$$

$$GH(z) = \frac{0.58(z+0.18)}{(z-0.135)(z-0.05)}$$

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1+K_p}; \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) \quad K_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.58(z+0.18)}{(z-0.135)(z-0.05)} = 0.83$$

$$e_{p\infty} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1+0.83} = 0.54$$

$$e_{v\infty} = \frac{1}{K_v}; \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z) \quad K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.58(z+0.18)}{(z-0.135)(z-0.05)} = 0$$

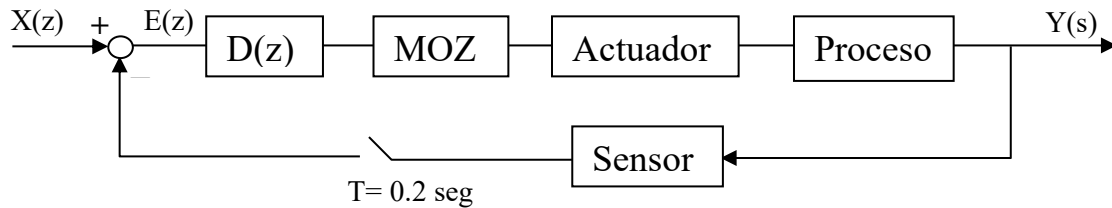
$$e_{v\infty} = \infty$$

$$e_{a\infty} = \frac{1}{K_a}; \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z) \quad K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \frac{0.58(z+0.18)}{(z-0.135)(z-0.05)} = 0$$

$$e_{a\infty} = \infty$$

EJERCICIO 4.6

Dado el sistema simplificado de control de temperatura de un proceso:



Donde:

El actuador tiene como función de transferencia: $A(s) = \frac{0.64}{s+1}$

El proceso se representa mediante la función de transferencia: $G(s) = \frac{50}{5s+1}$

Existe un sensor de temperatura que transforma la temperatura leída ($^{\circ}\text{C}$) en un valor de tensión (V), cuya función de transferencia es: $H(s) = 0.03$

Considerando el sistema equivalente discreto y $D(z)=1$, encontrar el valor de la temperatura de salida del sistema cuando la entrada es de 60°C . Para que sea comparable con la medida del sensor dicha entrada debe proporcionarse en su valor de tensión equivalente, es decir 1.8 V. ¿Cuál es el error en tanto por ciento que se ha producido?

Si $D(z)$ es una ganancia pura, encontrar dicho valor para que el sistema presente un error en régimen permanente del 3%. ¿Es estable el sistema?

Equivalente discreto del sistema:

$$G(s) = 0.64 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{50}{5s+1} = \frac{32}{(s+1)(5s+1)} = \frac{6.4}{(s+1)(s+0.2)}$$

$$GH(s) = 0.64 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{50}{5s+1} \cdot 0.03 = \frac{0.192}{(s+1)(s+0.2)}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \frac{G(s)}{s} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} =$$

$$= 6.4 \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \frac{1}{s(s+1)(s+0.2)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}}$$

$$R_1 = s \frac{1}{s(s+1)(s+0.2)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)(s+0.2)} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0} = \frac{1}{0.2} \frac{z}{z-1} = 5 \frac{z}{z-1}$$

$$R_2 = (s+1) \frac{1}{s(s+1)(s+0.2)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s(s+0.2)} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{0.8} \frac{z}{z-0.8187} =$$

$$= 1.25 \frac{z}{z-0.8187}$$

$$R_3 = (s+0.2) \frac{1}{s(s+1)(s+0.2)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-0.2} = \frac{1}{s(s+1)} \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=-0.2} =$$

$$\begin{aligned}
 G(z) &= 6.4 \frac{z-1}{z} \left[\frac{5z}{z-1} + \frac{1.25z}{z-0.8187} - \frac{6.25z}{z-0.9608} \right] = \\
 &= 6.4(z-1) \left[\frac{5}{z-1} + \frac{1.25}{z-0.8187} - \frac{6.25}{z-0.9608} \right] = \\
 &= 6.4(z-1) \frac{5(z-0.8187)(z-0.9608) + 1.25(z-1)(z-0.9608) - 6.25(z-1)(z-0.8187)}{(z-1)(z-0.8187)(z-0.9608)} = \\
 &= 6.4 \frac{5(z^2 - 1.7795z + 0.7866) + 1.25(z^2 - 1.9608z + 0.9608) - 6.25(z^2 - 1.8187z + 0.8187)}{(z-0.8187)(z-0.9608)} = \\
 &= 6.4 \frac{0.0184z + 0.0171}{(z-0.8187)(z-0.9608)} \\
 \boxed{G(z) &= \frac{0.1178(z + 0.9293)}{(z-0.8187)(z-0.9608)}}
 \end{aligned}$$

Al ser H(s) una constante el valor de GH(z) será:

$$\begin{aligned}
 GH(z) &= 0.03 \frac{0.1178(z + 0.9293)}{(z-0.8187)(z-0.9608)} \\
 \boxed{GH(z) &= \frac{0.0035(z + 0.9293)}{(z-0.8187)(z-0.9608)}}
 \end{aligned}$$

Y la función de transferencia de lazo cerrado considerando D(z)=1:

$$\begin{aligned}
 M(z) &= \frac{D(z) \cdot G(z)}{1 + D(z) \cdot GH(z)} = \frac{\frac{0.1178(z + 0.9293)}{(z-0.8187)(z-0.9608)}}{1 + \frac{0.0035(z + 0.9293)}{(z-0.8187)(z-0.9608)}} \\
 M(z) &= \frac{0.1178(z + 0.9293)}{z^2 - 1.7795z + 0.7866 + 0.0035z + 0.0033} \\
 \boxed{M(z) &= \frac{0.1178(z + 0.9293)}{z^2 - 1.776z + 0.7899}}
 \end{aligned}$$

Encontrar el valor de la temperatura de salida del sistema cuando la entrada es de 60°C:

Para que sea comparable con la medida del sensor dicha entrada debe proporcionarse en su

valor de tensión equivalente, es decir 1.8 V. Como al comparador le llega un valor de tensión correspondiente a la salida del sensor de temperatura, el valor de referencia utilizado debe utilizar la misma transformación de temperatura a tensión que el sensor utilizado, por tanto si la referencia de tensión es de 60°C, aplicando la función de transferencia del sensor el valor de tensión de referencia será: $60 \cdot 0.03 = 1.8 \text{ V}$

$$Y_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} M(z)X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{0.1178(z+0.9293)}{z^2 - 1.776z + 0.7899} \cdot \frac{1.8z}{z-1} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.1178(z+0.9293)}{z^2 - 1.776z + 0.7899} \cdot 1.8 = 29.43^\circ \text{C}$$

El error en tanto por ciento que se ha producido será:

$$e_{rp} = \frac{60 - 29.43}{60} = 0.51 = 51\%$$

Otra posible forma de calcularlo sería:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0.0035(z+0.9293)}{(z-0.8187)(z-0.9608)} = 0.9501$$

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 0.9501} = 0.51 = 51\%$$

Si $D(z)$ es una ganancia pura, encontrar dicho valor para que el sistema presente un error en régimen permanente del 3%. ¿Es estable el sistema?

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.03 \quad K_p = 32.33$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} K \cdot GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K \cdot 0.0035(z+0.9293)}{(z-0.8187)(z-0.9608)} = 0.9501 \cdot K = 32.33$$

$$\boxed{K = 34}$$

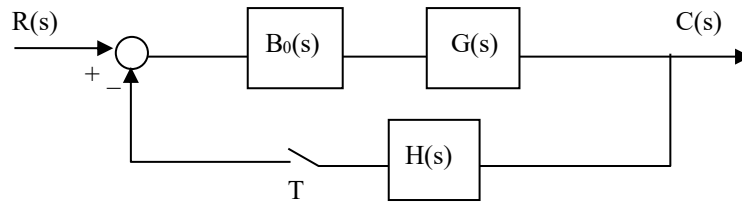
Para analizar la estabilidad del sistema se calcula la expresión de la ecuación característica:

$$1 + 34 \cdot \frac{0.0035(z+0.9293)}{(z-0.8187)(z-0.9608)} = 0$$

$$z^2 - 1.6605z + 0.872 = 0 \quad z = 0.83 \pm j0.46 \quad |z| < 1 \text{ luego el sistema es estable.}$$

EJERCICIO 4.7

Para el sistema de control mostrado en la figura:



$$G(s) = \frac{1}{s-3} \quad H(s) = 5$$

Calcular el error en régimen permanente ante entrada escalón unitario.

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \left[\frac{1}{s(s-3)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \right] =$$

$$R_1 = s \cdot \frac{1}{s(s-3)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s-3)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=0} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$R_2 = (s-3) \cdot \frac{1}{s(s-3)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=3} = \frac{1}{s} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \Big|_{s=3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-e^{3T}}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-e^{3T}} \right] = \frac{1}{3} \left[-1 + \frac{z-1}{z-e^{3T}} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{-z + e^{3T} + z - 1}{z-e^{3T}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{3T} - 1}{z-e^{3T}}$$

$$\boxed{GH(z) = \frac{5}{3} \cdot \frac{e^{3T} - 1}{z-e^{3T}}}$$

Error de régimen permanente ante entrada escalón unitario:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{5}{3} \cdot \frac{e^{3T} - 1}{z-e^{3T}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{-(1-e^{3T})}{1-e^{3T}} = -\frac{5}{3}$$

$$e_{rp} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$\boxed{e_{rp} = -1.5}$$

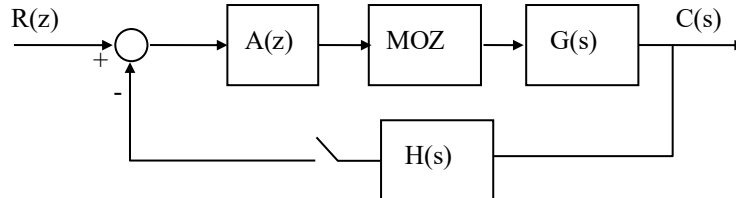
El error es independiente del periodo de muestreo (para sistemas estables).

EJERCICIO 4.8

Para el sistema mostrado en la figura donde:

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 6.931)} \quad H(s) = 6.931$$

Diseñar el regulador $A(z)$ discreto más sencillo para que el error de régimen permanente ante una entrada unitaria sea 0.01. Periodo de muestreo: 0.1 segundos.



Cálculo del equivalente discreto de $G(z)$:

$$\begin{aligned} GH(z) &= Z \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{6.931}{s(s + 6.931)} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{6.931}{s^2(s + 6.931)} \right] = \\ &= 6.931 \frac{z-1}{z} \sum_{\text{Polos}} \text{Residuos} \left[\frac{1}{s^2(s + 6.931)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \\ R_1 &= \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2(s + 6.931)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \Bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s + 6.931)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \Bigg|_{s=0} = \\ &= \left[- \frac{z[z - e^{sT} + (s + 6.931)(-Te^{sT})]}{(s + 6.931)^2 (z - e^{sT})^2} \right] \Bigg|_{s=0} = - \frac{z[z - 1 - 6.931 \cdot 0.1]}{6.931^2 (z - 1)^2} = - \frac{1}{6.931^2} \frac{z(z - 1.6931)}{(z - 1)^2} \\ R_2 &= \left[(s + 6.931) \frac{1}{s^2(s + 6.931)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \Bigg|_{s=-6.931} = \frac{1}{s^2} \frac{z}{z - e^{0.1s}} \Bigg|_{s=-6.931} = \frac{1}{6.931^2} \frac{z}{z - 0.5} \\ GH(z) &= 6.931 \frac{z-1}{z} \left[- \frac{1}{6.931^2} \frac{z(z - 1.6931)}{(z - 1)^2} + \frac{1}{6.931^2} \frac{z}{z - 0.5} \right] = \\ &= \frac{z-1}{6.931} \frac{(1.6931 - z)(z - 0.5) + (z - 1)^2}{(z - 1)^2 (z - 0.5)} = \frac{1}{6.931} \frac{2.1931z - z^2 - 0.5 \cdot 1.6931 + z^2 - 2z + 1}{(z - 1)(z - 0.5)} = \frac{0.1931z + 0.153}{6.931(z - 1)(z - 0.5)} \\ GH(z) &= \frac{0.028(z + 0.793)}{(z - 1)(z - 0.5)} \end{aligned}$$

El sistema es de tipo 1, luego tendrá un error finito ante una entrada rampa:

Error inicial:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{0.028(z + 0.793)}{(z - 1)(z - 0.5)} = \frac{0.028 \cdot 1.793}{0.5} = 0.100$$

$$e_{rp} = \frac{T}{K_v} = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

Nuevo error:

$$e'_{rp} = 0.01 = \frac{T}{K'_v} \quad K'_v = \frac{T}{0.01} = \frac{0.1}{0.01} = 10$$

$$K'_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot k \cdot GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot k \cdot \frac{0.028(z+0.793)}{(z-1)(z-0.5)} = k \frac{0.028 \cdot 1.793}{0.5} = 0.1k = 10$$

$$k = 100$$

$$\boxed{A(z) = 100}$$