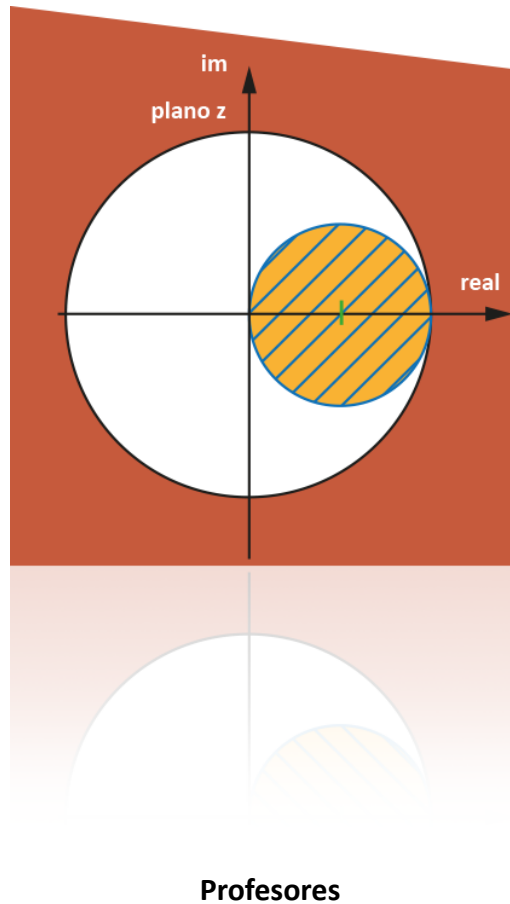


Control por computador

Ejercicios 5



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 5.1

Analizar la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica es:

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 2.25z - 0.5$$

Tabla de Jury:

z^3	z^2	z^1	z^0
1	-3	2.25	-0.5
-0.5	2.25	-3	1
-0.75	1.875	-0.75	

$$P(1) > 0 \quad P(1) = 1 - 3 + 2.25 - 0.5 = -0.25 < 0 \quad \text{Inestable}$$

EJERCICIO 5.2

Analizar la estabilidad de un sistema cuya ecuación característica es:

$$P(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08$$

$$P(1) > 0 \quad P(1) = 1 - 1.2 + 0.07 + 0.3 - 0.08 = 0.09 > 0$$

$$P(-1) > 0 \quad P(-1) = 1 + 1.2 + 0.07 - 0.3 - 0.08 = 1.89 > 0$$

$$|a_0| < |a_n| \quad -0.08 < 1$$

Tabla de Jury:

z^4	z^3	z^2	z^1	z^0
1	-1.2	0.07	0.3	-0.08
-0.08	0.3	0.07	-1.2	1
0.9936	-1.176	0.0756	0.204	
0.204	0.0756	-1.176	0.9936	
0.9456	-1.1837	0.3155		

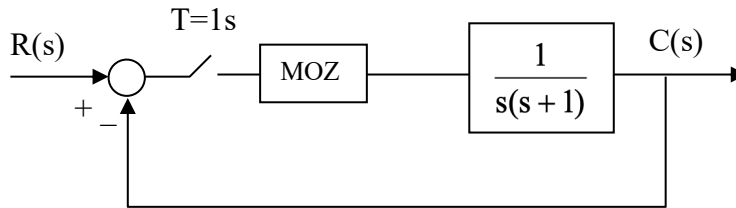
$$|b_0| > |b_{n-1}| \quad |0.9936| > |0.204|$$

$$|q_0| > |q_2| \quad |0.945| > |0.315|$$

Cumple todas las condiciones, por tanto el sistema es estable.

EJERCICIO 5.3

Determinar si el sistema es estable:



La estabilidad de este sistema se va analizar de tres formas diferentes:

a) Observación de los polos de lazo cerrado:

$$M(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right]$$

$$R_1 = (s+1) \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \cdot \frac{z}{z - e^{Ts}} \Big|_{s=-1} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$$R_2 = \frac{d}{ds} \left[s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=0} = \frac{-z(z - e^{Ts} + (s+1) \cdot (-T) \cdot e^{Ts})}{(s+1)^2(z - e^{Ts})^2} \Big|_{s=0} = \frac{-z(z-1-T)}{(z-1)^2}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z - e^{-T}} - \frac{z(z-1-T)}{(z-1)^2} \right] = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z^2(T-1+e^{-T}) + z(1-e^{-T} - T \cdot e^{-T})}{(z - e^{-T})(z-1)^2} =$$

$$G(z) = \frac{z(T-1+e^{-T}) + 1 - e^{-T} - T \cdot e^{-T}}{(z - e^{-T})(z-1)}$$

Para $T = 1$ segundo:

$$G(z) = \frac{0.367z + 0.264}{(z-1)(z-0.367)}$$

Ecuación característica:

$$1 + G(z) = 0$$

$$(z-1)(z-0.367) + 0.367z + 0.264 = 0$$

$$z^2 - z + 0.6321 = 0$$

$$\text{Raíces: } \begin{cases} z_1 = 0.5 + j0.618 \\ z_2 = 0.5 - j0.618 \end{cases}$$

$$\text{Módulo: } |z_{1,2}| = \sqrt{0.5^2 + 0.618^2} = 0.79 < 1 \quad \text{Estable}$$

b) Criterio de Jury:

$$P(z) = z^2 - z + 0.6321$$

Condiciones:

$$P(1) > 0 \quad P(1) = 1 - 1 + 0.6321 = 0.6321 > 0$$

$$P(-1) > 0 \quad P(-1) = 1 + 1 + 0.6321 = 2.6321 > 0$$

$$|a_0| < a_n \quad |0.6321| < 1$$

Luego es estable.

c) Criterio de Routh:

$$P(z) = z^2 - z + 0.6321$$

Aplicando la transformación bilineal:

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 - \left(\frac{1+w}{1-w}\right) + 0.6321 = 0$$

$$(1+w)^2 - (1+w)(1-w) + 0.6321 \cdot (1-w)^2 = 0$$

$$2.6321w^2 + 0.7358w + 0.6321 = 0$$

Condiciones:

Todos los coeficientes con igual signo.

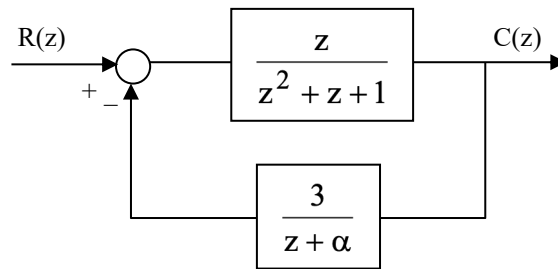
Tabla de Routh:

w^2	2.6321	0.6321
w^1	0.7358	
w^0	0.6321	

No hay cambios de signo en la primera columna, luego el sistema es estable.

EJERCICIO 5.4

Calcular los valores de α que hacen estable el sistema:



$$M(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\frac{z}{z^2 + z + 1}}{1 + \frac{3}{z + \alpha} \cdot \frac{z}{z^2 + z + 1}} = \frac{z(z + \alpha)}{(z + \alpha)(z^2 + z + 1) + 3z} = \frac{z(z + \alpha)}{z^3 + (1 + \alpha)z^2 + (4 + \alpha)z + \alpha}$$

Ecuación característica:

$$P(z) = z^3 + (1 + \alpha)z^2 + (4 + \alpha)z + \alpha = 0$$

Cambio:

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}$$

$$\left(\frac{1 + w}{1 - w}\right)^3 + (1 + \alpha)\left(\frac{1 + w}{1 - w}\right)^2 + (4 + \alpha)\left(\frac{1 + w}{1 - w}\right) + \alpha = 0$$

$$(1 + w)^3 + (1 + \alpha)(1 + w)^2(1 - w) + (4 + \alpha)(1 + w)(1 - w)^2 + \alpha(1 - w)^3 = 0$$

$$(4 - \alpha)w^3 + (\alpha - 2)w^2 - 3\alpha w + 6 + 3\alpha = 0$$

Tabla de Routh:

w^3	$4 - \alpha$	-3α
w^2	$\alpha - 2$	$6 + 3\alpha$
w^1	$\frac{-24}{\alpha - 2}$	
w^0	$6 + 3\alpha$	

$$4 - \alpha > 0 \quad \alpha < 4$$

$$\alpha - 2 > 0 \quad \alpha > 2$$

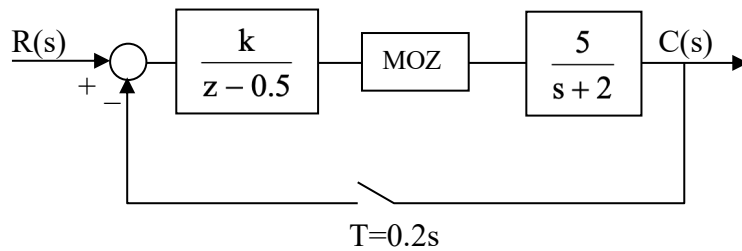
$$\alpha - 2 < 0 \quad \alpha < 2$$

$$6 + 3\alpha > 0 \quad \alpha > -2$$

No existe ningún valor de α que pueda cumplir las condiciones anteriores, luego el sistema es inestable.

EJERCICIO 5.5

Para el sistema mostrado en la figura hallar los valores de k para los que es estable aplicando el criterio de Routh y el criterio de Jury.



$$G(z) = \frac{z-1}{z} \sum \text{Res} \left[\frac{5}{s(s+2)} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \right] = \frac{z-1}{z} \left[\frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z-0.67} \right] = \frac{5}{2} \left[1 - \frac{z-1}{z-0.67} \right]$$

$$G(z) = \frac{0.825}{z-0.67}$$

$$M(z) = \frac{\frac{k}{z-0.5} \cdot \frac{0.825}{z-0.67}}{1 + \frac{k}{z-0.5} \cdot \frac{0.825}{z-0.67}} = \frac{0.825k}{(z-0.5)(z-0.67) + 0.825k}$$

Ecuación característica:

$$z^2 - 1.17z + 0.335 + 0.825k = 0$$

Aplicando el criterio de Routh:

Cambio: $z = \frac{1+w}{1-w}$

$$(1+w)^2 - 1.17(1+w)(1-w) + (0.335 + 0.825k)(1-w)^2 = 0$$

$$1 + 2w + w^2 - 1.17(1-w^2) + (0.335 + 0.825k)(1-2w+w^2) = 0$$

$$2.17w^2 + 2w - 0.17 + 0.335 - 0.67w + 0.335w^2 + 0.825k - 1.65k \cdot w + 0.825k \cdot w^2 = 0$$

$$(2.505 + 0.825k)w^2 + (1.33 - 1.65k)w + 0.165 + 0.825k = 0$$

Tabla de Routh:

w^2	$2.505 + 0.825k$	$0.165 + 0.825k$
w^1	$1.33 - 1.65k$	
w^0	$0.165 + 0.825k$	
$2.505 + 0.825k > 0 \quad k > -0.33$		
$1.33 - 1.65k > 0 \quad k < 0.81$		

$$0.165 + 0.825k > 0 \quad k > -0.2$$

Luego el rango de estabilidad es: $-0.2 < k < 0.8$

Aplicando el criterio de Jury:

$$P(z) = z^2 - 1.17z + 0.335 + 0.825k = 0$$

Condiciones:

$$P(1) > 0 \quad 1 - 1.17 + 0.335 + 0.825k > 0 \\ 0.825k > -0.165 \quad k > -0.2$$

$$P(-1) > 0 \quad 1 + 1.17 + 0.335 + 0.825k > 0 \quad k > -3$$

$$|a_0| < a_n \quad |0.335 + 0.825k| < 1$$

Analizamos los cambios de signo del interior del valor absoluto:

$$0.335 + 0.825k = 0 \quad k = -0.406$$

Como $k > -0.2$ estamos en la zona donde el interior del valor absoluto es positivo, luego se puede quitar directamente el valor absoluto:

$$0.335 + 0.825k < 1 \quad k < 0.81$$

Luego el rango de estabilidad es: $-0.2 < k < 0.8$

EJERCICIO 5.6

Un proceso de fabricación tiene una función de transferencia en lazo abierto dada por:

$$G(s) = \frac{0.4e^{-s}}{s(5s+1)}$$

Se desea realizar un control discreto empleando un bloqueador de orden cero y realimentación unitaria, siendo el periodo de muestreo elegido de 1segundo.

Encontrar el equivalente discreto de la planta. ¿Tiene el sistema discreto retardo? Si es así, ¿de cuantos periodos de muestreo? Comprobar la estabilidad del sistema.

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \frac{0.4z^{-1}}{5} Z \left[\frac{1}{s^2(s+0.2)} \right] = 0.08 \frac{z-1}{z^2} \sum_{\text{Polos}} \text{Residuos} \left[\frac{1}{s^2(s+0.2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2(s+0.2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{(s+0.2)} \frac{z}{z - e^s} \right]_{s=0} = \\ &= - \frac{z[z - e^s + ((s+0.2)(-e^s))]}{(s+0.2)^2(z - e^s)^2} \Big|_{s=0} = - \frac{z(z-1-0.2)}{0.2^2(z-1)^2} = -25 \frac{z(z-1.2)}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

$$R_2 = \left[(s + 0.2) \frac{1}{s^2 (s + 0.2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]_{s=-0.2} = \frac{1}{s^2} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-0.2} = 25 \frac{z}{z - 0.819}$$

$$\begin{aligned} G(z) &= 0.08 \frac{z-1}{z^2} \left[-25 \frac{z(z-1.2)}{(z-1)^2} + 25 \frac{z}{z-0.819} \right] = \frac{2}{z} \left[-\frac{z-1.2}{z-1} + \frac{z-1}{z-0.819} \right] = \\ &= \frac{2}{z} \cdot \frac{-(z-0.819)(z-1.2) + (z-1)^2}{(z-1)(z-0.819)} = \frac{2}{z} \cdot \frac{-(z^2 - 2.019z + .9828) + (z^2 - 2z + 1)}{(z-1)(z-0.819)} = \\ &= \frac{2}{z} \frac{0.019z + 0.0172}{(z-1)(z-0.819)} = \frac{0.038(z + 0.905)}{z(z-1)(z-0.819)} \end{aligned}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{0.038(z + 0.905)}{z(z-1)(z-0.819)}}$$

El sistema posee un retardo puro de 1 segundo.

Cálculo de la ecuación característica:

$$\begin{aligned} 1 + GH(z) &= 0 \quad 1 + \frac{0.038(z + 0.905)}{z(z-1)(z-0.819)} = 0 \quad z(z-1)(z-0.819) + 0.038(z + 0.905) = 0 \\ z^3 - 1.819z^2 + 0.819z + 0.038z + .03439 &= 0 \\ z^3 - 1.819z^2 + 0.857z + 0.03439 &= 0 \end{aligned}$$

Tabla de Jury:

1	-1.819	0.857	0.03439
0.03439	0.857	-1.819	1
-0.91956	1.8485	-0.99882	

$$P(1) = 1 - 1.819 + 0.857 + 0.03439 = 0.07239 > 0 \quad \text{cumple la condición}$$

$$P(-1) = -1 - 1.819 - 0.857 + 0.03439 = -3.6416 < 0 \quad \text{cumple la condición}$$

$$|a_0| < a_n \quad |0.03439| < 1 \quad \text{cumple la condición}$$

$$|q_0| > |q_2| \quad |-0.91956| > |-0.99882| \rightarrow 0.91956 < 0.99882 \quad \text{NO cumple la condición}$$

Inestable

EJERCICIO 5.7

Para el ejercicio 2.1 utilizando un periodo de muestreo de 0.05 segundos se pide:

- Aplicar el criterio de Routh-Hurwitz para determinar el margen de estabilidad para la ganancia K del sistema discretizado.
- Determinar la posición de las raíces de la ecuación característica en el plano z y en el plano w, que hace al sistema marginalmente estable cuando $K > 0$.
- Determinar la frecuencia a la cual el sistema oscila cuando es marginalmente estable, en el plano s y en el plano w. Interpretar los resultados obtenidos.

Discretización:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = 20 \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+6)} \right]$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2(s+6)} \frac{1}{1-e^{0.05s}z^{-1}} \right] \Bigg|_{s=0} = \frac{- \left[(1-e^{0.05s}z^{-1}) + (s+6)(-0.05e^{0.05s}z^{-1}) \right]}{(s+6)^2(1-e^{0.05s}z^{-1})} \Bigg|_{s=0} = \\ &= \frac{-[1-z^{-1}-0.3z^{-1}]}{36(1-z^{-1})^2} = \frac{-1+1.3z^{-1}}{36(1-z^{-1})^2} = \frac{1}{36} \frac{z(1.3-z)}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

$$R_2 = (s+6) \frac{1}{s^2(s+6)} \frac{1}{1-e^{0.05s}z^{-1}} \Bigg|_{s=-6} = \frac{1}{36} \frac{1}{1-0.7408z^{-1}} = \frac{1}{36} \frac{z}{z-0.7408}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \frac{20}{36} \left[\frac{z(1.3-z)}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-0.7408} \right] = \frac{5}{9} (z-1) \left[\frac{(1.3-z)(z-0.7408) + (z-1)^2}{(z-1)^2(z-0.7408)} \right] =$$

$$G(z) = \frac{5-z^2+0.7408z+1.3z-0.963+z^2-2z+1}{9(z-1)(z-0.7408)}$$

$$G(z) = 0.0227 \frac{z+0.9068}{(z-1)(z-0.7408)}$$

Transformación bilineal:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} = \frac{1 + 0.025w}{1 - 0.025w}$$

$$1 + K \cdot G(z) \cdot H(z) = 0$$

$$1 + K \cdot \frac{0.0227z+0.0205}{(z-1)(z-0.7408)} \cdot 0.4 = 0$$

$$(z-1)(z-0.7408) + 0.4K(0.0227z + 0.0205) = 0$$

$$z^2 - 1.7408z + 0.7408 + 0.0091Kz + 0.0082K = 0$$

$$z^2 + (0.0091K - 1.7408)z + 0.0082K + 0.7408 = 0$$

$$\left[\frac{1+0.025w}{1-0.025w} \right]^2 + (0.0091K - 1.7408) \left[\frac{1+0.025w}{1-0.025w} \right] + 0.0082K + 0.7408 = 0$$

$$(1+0.025w)^2 + (0.0091K - 1.7408)(1+0.025w)(1-0.025w) + (0.0082K + 0.7408)(1-0.025w)^2 = 0$$

$$1 + 0.0006w^2 + 0.05w + (0.0091K - 1.7408)(1 - 0.0006w^2) + (0.0082K + 0.7408)(1 + 0.0006w^2 - 0.005w) = 0$$

$$(1 + 0.0006w^2 + 0.05w) + (0.0091K - 0w^2 - 1.7408 + 0.001w^2) + 0.0082K + 0Kw^2 - 0.0004Kw + 0.7408 + 0.0004w^2 - 0.037w = 0$$

$$0.002w^2 + (0.013 - 0.0004K)w + 0.0173K = 0$$

Tabla de Routh:

w^2	0.002	0.0173K
w^1	0.013-0.0004K	0
w^0	0.0173K	

$$\begin{array}{ll} 0.013-0.0004K \geq 0 & K \leq \frac{0.013}{0.0004} = 32.5 \\ 0.0173K \geq 0 & K \geq 0 \end{array}$$

El rango para el cual el sistema es estable es: $0 \leq K \leq 32.5$

Posición de las raíces de la ecuación característica en el plano z y en el plano w, que hace al sistema marginalmente estable cuando $K > 0$:

En el plano w, sustituyendo el valor de K en la ecuación característica en w o en la ecuación auxiliar obtenida de la fila anterior de la tabla de Routh:

$$0.002w^2 + (0.013 - 0.0004K)w + 0.0173K = 0$$

$$0.002w^2 + (0.013 - 0.0004 \cdot 32.5)w + 0.0173 \cdot 32.5 = 0$$

$$0.002w^2 + 0.56225 = 0$$

$$w_{1,2} = \pm j16.7668$$

En el plano z , se obtiene sustituyendo el valor de K en la ecuación característica en z o deshaciendo la transformación bilineal para los valores obtenidos en el plano w :

$$z^2 + (0.0091K - 1.7408)z + 0.0082K + 0.7408 = 0$$

$$z^2 + (0.0091 \cdot 32.5 - 1.7408)z + 0.0082 \cdot 32.5 + 0.7408 = 0$$

$$z^2 - 1.44505z + 1.0073 = 0$$

$$z_{1,2} = 0.7225 \pm j0.6966 \text{ donde } |z| = 1.$$

Frecuencia a la cual el sistema oscila cuando es marginalmente estable, en el plano s y en el plano w :

En el plano w , la frecuencia de oscilación corresponde con el corte con el eje imaginario, y esta es una frecuencia ficticia:

$$\nu = 16.7668 \text{ rad/s}$$

Para el plano s ,

$$\omega = \frac{2}{T} \arctg \frac{\nu T}{2} = \frac{2}{0.05} \arctg \frac{16.7668 \cdot 0.05}{2} = 15.8769 \text{ rad/s}$$

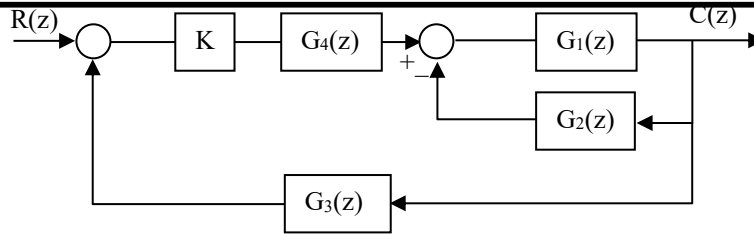
La frecuencia máxima que se puede muestrear es: $\frac{\omega_s}{2}$

Para un periodo de muestreo de 0.05 segundos corresponde $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.05} = 40\pi$

Luego la frecuencia máxima que se puede muestrear será $\frac{\omega_s}{2} = 20\pi = 62.83 \text{ rad/s}$

EJERCICIO 5.8

Dado el siguiente sistema discreto:



$$\text{con } G_1(z) = \frac{z}{z - 1/2} \quad G_2(z) = \frac{1}{4} \quad G_3(z) = \frac{1}{z} \quad G_4(z) = \frac{z}{z + 1/2}$$

Calcular el rango de valores de K que hacen estable al sistema.

Resolviendo el lazo interno:

$$G_5(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z) \cdot G_2(z)} = \frac{\frac{z}{z - 0.5}}{1 + \frac{z}{z - 0.5} \cdot 0.25} = \frac{z}{z - 0.5 + 0.25z} = \frac{z}{1.25z - 0.5} = 0.8 \frac{z}{z - 0.4}$$

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema completo será:

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} = M(z) &= \frac{K \cdot G_4(z) \cdot G_5(z)}{1 + K \cdot G_3(z) \cdot G_4(z) \cdot G_5(z)} = \frac{K \cdot \frac{z}{z + 0.5} \cdot 0.8 \frac{z}{z - 0.4}}{1 + K \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z + 0.5} \cdot 0.8 \frac{z}{z - 0.4}} = \\ &= \frac{0.8 \cdot K \cdot z^2}{(z + 0.5)(z - 0.4)} = \frac{0.8 \cdot K \cdot z^3}{z^3 + 0.1z^2 - 0.2z + 0.8Kz^2} = \frac{0.8 \cdot K \cdot z^3}{z^3 + (0.1 + 0.8K)z^2 - 0.2z} \\ M(z) &= \frac{0.8 \cdot K \cdot z^2}{z^2 + (0.1 + 0.8K)z - 0.2} \end{aligned}$$

El denominador de la función de transferencia de lazo cerrado será la ecuación característica:

$$z^2 + (0.1 + 0.8K)z - 0.2 = 0$$

Realizamos el cambio $z = \frac{1+w}{1-w}$, para aplicar el criterio de Routh para analizar el rango de estabilidad:

$$\left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 + (0.1 + 0.8K) \left(\frac{1+w}{1-w} \right) - 0.2 = 0$$

$$(1+w)^2 + (0.1 + 0.8K)(1+w)(1-w) - 0.2(1-w)^2 = 0$$

$$(1 + 2w + w^2) + (0.1 + 0.8K)(1 - w^2) - 0.2(1 - 2w + w^2) = 0$$

$$1 + 2w + w^2 + 0.1 - 0.1w^2 + 0.8K - 0.8Kw^2 - 0.2 + 0.4w - 0.2w^2 = 0$$

$$(0.7 - 0.8K)w^2 + 2.4w + 0.9 + 0.8K = 0$$

Construyendo la tabla de Routh:

w^2	$0.7 - 0.8K$	$0.9 + 0.8K$
w^1	2.4	
w^0	$0.9 + 0.8K$	

$$0.9 + 0.8K > 0 \quad K > -1.125$$

$$0.7 - 0.8K > 0 \quad K < 0.875$$

$$\boxed{-1.125 < K < 0.875}$$

