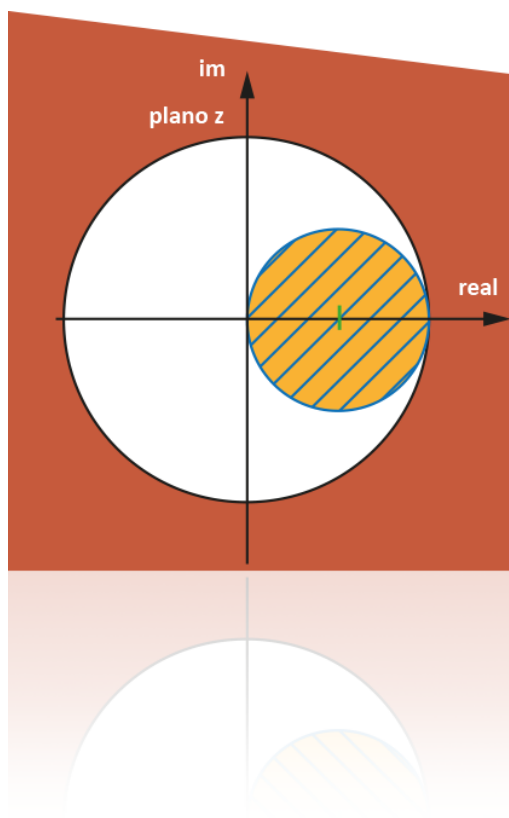


Control por computador

Ejercicios 6



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

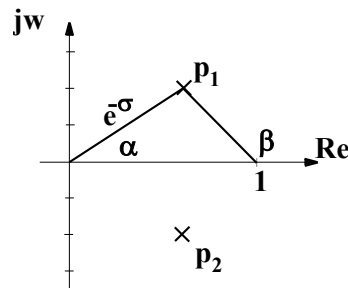
Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 6.1

Obtener las características de la respuesta ante una entrada escalón unidad. $T=0.1\text{sg.}$

$$M(z) = \frac{1}{z^2 - z + 0.5}$$



$$z_{1,2} = 0.5 \pm j0.5$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{0.5}{0.5}\right) = 45^\circ \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\beta = 180^\circ - \arctg\left(\frac{0.5}{0.5}\right) = 135^\circ \rightarrow \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$|z_1| = 0.707 = e^{-\sigma} \rightarrow \sigma = 0.346$$

Tiempo de Subida:

$$K_r = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3\pi/4}{\pi/4} = 3 \rightarrow t_r = K_r T = 0.3\text{sg.}$$

Tiempo de Pico:

$$K_p = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\pi/4} = 4 \rightarrow t_p = K_p T = 0.4\text{sg.}$$

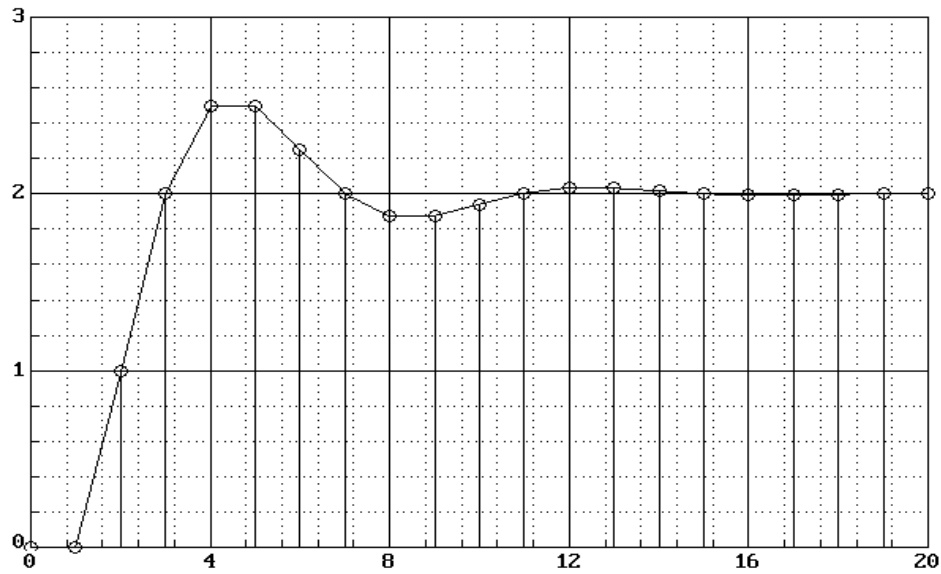
Sobreimpulso:

$$M_p(\%) = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi \cdot 0.346}{\pi/4}} = 25\%$$

Tiempo de Establecimiento:

$$K_s = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{0.346} = 9.08 \rightarrow 10 \rightarrow t_s = K_s T = 1\text{sg.}$$

La figura muestra la forma de la respuesta para el sistema ante una entrada escalón unitario.



EJERCICIO 6.2

Obtener las características de la respuesta ante una entrada escalón unidad. $T=0.4\text{sg.}$

$$M(z) = \frac{0.33(z + 0.8)}{z^2 - 1.17z + 0.804}$$

$$z_{1,2} = 0.58 \pm j0.68$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{0.68}{0.58}\right) = 49.5^\circ \rightarrow 0.86\text{rad}$$

$$\beta = 180^\circ - \arctg\left(\frac{0.68}{0.42}\right) = 121.7^\circ$$

$$|z_1| = 0.89 = e^{-\sigma} \rightarrow \sigma = 0.112$$

Tiempo de Subida:

$$K_r = \frac{\beta}{\alpha} = 2.45 \rightarrow 3 \rightarrow t_r = 1.2\text{sg.}$$

Tiempo de Pico:

$$K_p = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{0.86} = 3.63 \rightarrow 4 \rightarrow t_p = 1.6\text{sg.}$$

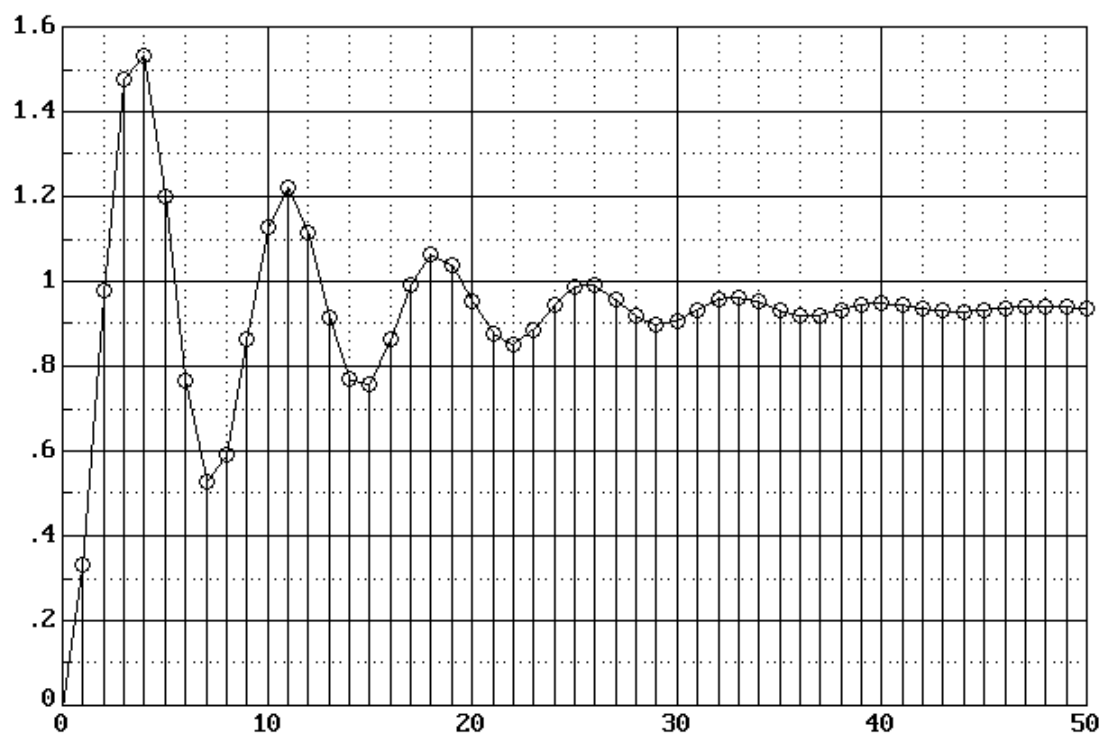
Sobreimpulso:

$$M_p(\%) = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 66.3\%$$

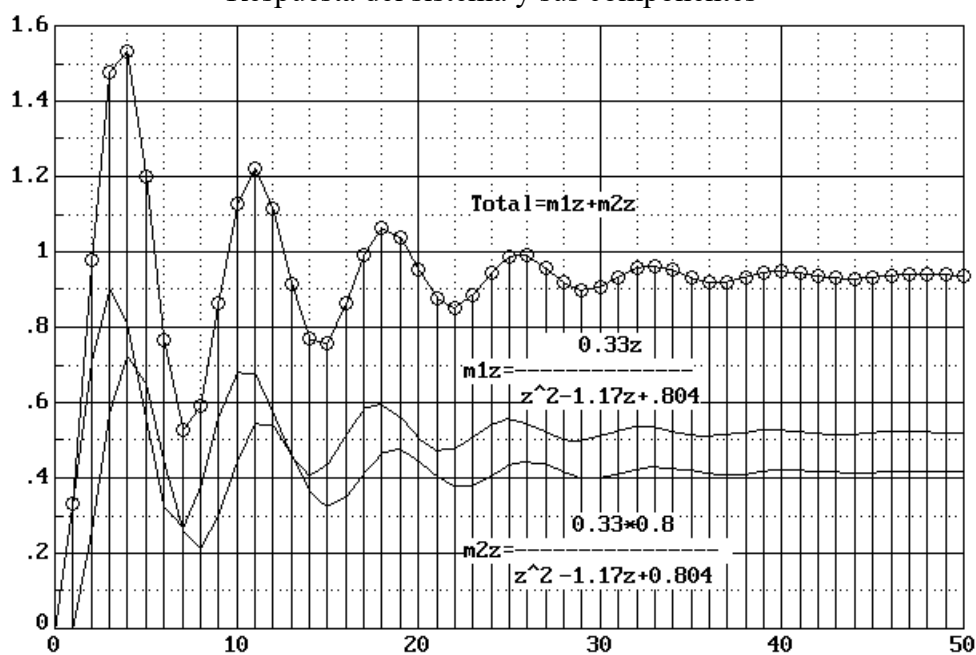
Tiempo de establecimiento:

$$K_s = \frac{\pi}{\sigma} = 27.9 \rightarrow 28 \rightarrow t_s = 11.2\text{sg.}$$

Respuesta del sistema



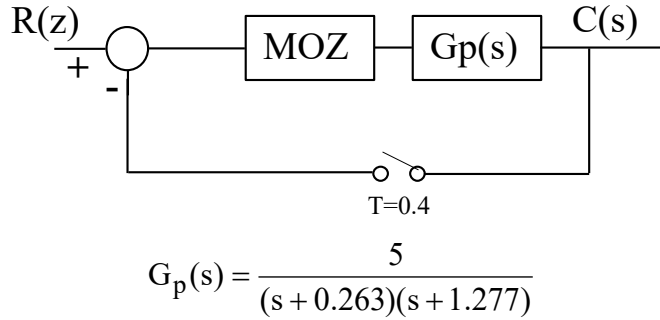
Respuesta del sistema y sus componentes



EJERCICIO 6.3

Para el sistema mostrado en la figura calcular:

- Error en régimen permanente.
- Sobreimpulso.



$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{5}{s(s + 0.263)(s + 1.277)} \cdot \frac{1}{1 - e^{T_s} z^{-1}} \right]$$

$$R_1 = \frac{5}{0.263 \cdot 1.277} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$R_2 = \frac{5}{-0.263(-0.263 + 1.277)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-0.263 \cdot 0.4} z^{-1}}$$

$$R_3 = \frac{5}{-1.277(-1.277 + 0.263)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1.277 \cdot 0.4} z^{-1}}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{14.887}{1 - z^{-1}} - \frac{18.748}{1 - 0.9z^{-1}} + \frac{3.861}{1 - 0.6z^{-1}} \right]$$

$$G(z) = 0.33 \frac{z + 0.8}{(z - 0.9)(z - 0.6)}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} 0.33 \frac{z + 0.8}{(z - 0.9)(z - 0.6)} = 14.85$$

$$e_p = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 14.85} = 0.063$$

$$M(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0.33(z + 0.8)}{z^2 - 1.17z + 0.804}$$

Respuesta al escalón:

$$Y(z) = \frac{0.33(z + 0.8)}{z^2 - 1.17z + 0.804} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

$$Y(z) = \frac{0.33z^2 + 0.264z}{z^3 - 2.17z^2 + 1.974z - 0.804}$$

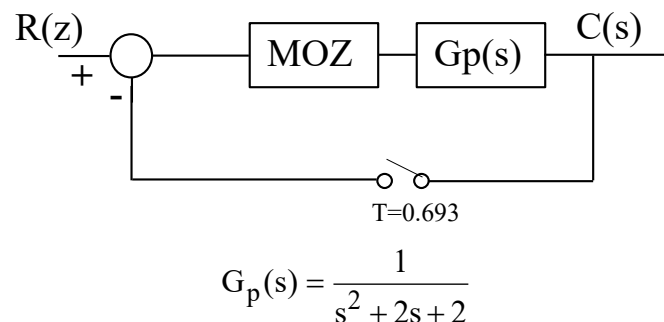
$$y_k = \{0, 0.33, 0.98, 1.475, 1.531, 1.198, \dots\}$$

$$M_p = \frac{Y_{\max} - Y_{\infty}}{Y_{\infty}} = \frac{1.531 - 0.937}{0.937} = 0.63 \rightarrow 63\%$$

$$K_p = 4 \rightarrow t_p = K_p T = 1.6 \text{sg.}$$

EJERCICIO 6.4

Obtener las características de la respuesta ante entrada escalón unidad.



$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \right]$$

Tres polos:

$$\begin{aligned} s &= -1 + j \\ \mathbf{s} &= \mathbf{-1 - j} \\ s &= 0 \end{aligned}$$

$$R_1 = \left[\frac{1}{s(s + 1 + j)} \cdot \frac{z}{z - e^{Ts}} \right]_{s=-1+j} = \frac{z}{(-1 + j)2j(z - e^{-T}e^{jT})} =$$

$$\mathbf{R_1} = \frac{\mathbf{z}}{(-1+j) \cdot 2j \cdot (z - e^{-T}(\cos T + j \sin T))} =$$

$$R_1 = \frac{z}{(-1+j)2j(z-0.385-j0.32)} = \frac{-z}{2z(1+j)-(0.13+1.41j)}$$

$$R_2 = \left[\frac{1}{s(s+1-j)} \cdot \frac{z}{z-e^{Ts}} \right]_{s=-1-j} = \frac{z}{(-1-j)(-2j)(z-e^{-T}e^{-jT})} =$$

$$R_2 = \frac{-z}{2z(1-j)-(0.13-1.41j)}$$

$$R_3 = \left[\frac{1}{s^2+2s+2} \cdot \frac{z}{z-e^{Ts}} \right]_{s=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} =$$

$$G(z) = \frac{0.148(z+0.62)}{z^2-0.77z+0.25}$$

$$M(z) = \frac{0.148(z+0.62)}{z^2-0.622z+0.341}$$

Características:

$$z_{1,2} = 0.311 \pm j0.49$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{0.49}{0.311}\right) = 59^\circ \rightarrow 1\text{rad}$$

$$\beta = 180 - \arctg\left(\frac{0.49}{(1-0.311)}\right) = 143.7^\circ \rightarrow 2.51\text{rad}$$

$$|z_1| = 0.58 = e^{-\sigma} \rightarrow \sigma = 0.544$$

Tiempo de Subida:

$$K_r = \frac{\beta}{\alpha} = 2.51 \rightarrow 3 \rightarrow t_r = 2.08\text{sg.}$$

Tiempo de Pico:

$$K_p = \frac{\pi}{\alpha} = \pi \rightarrow 4 \rightarrow t_p = 2.77\text{sg.}$$

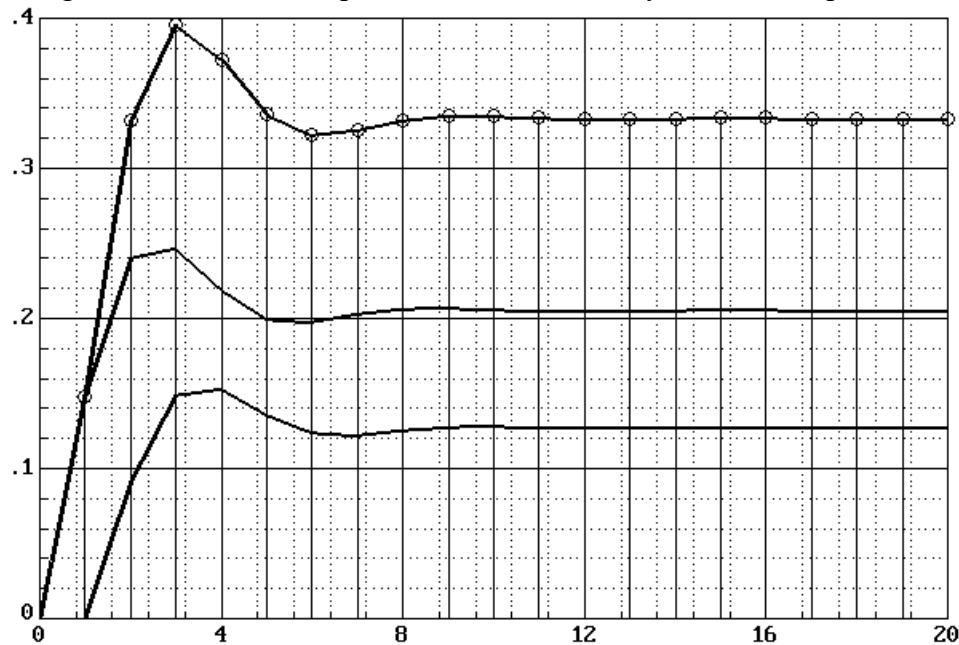
Sobreimpulso:

$$M_p(\%) = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 18.1\%$$

Tiempo de establecimiento:

$$K_s = \frac{\pi}{\sigma} = 5.7 \rightarrow 6 \rightarrow t_s = 4.15\text{sg.}$$

La figura siguiente muestra la respuesta total del sistema y sus dos componentes



EJERCICIO 6.5

Un proceso de fabricación tiene una función de transferencia en lazo abierto dada por :

$$G(s) = \frac{0.4e^{-s}}{s(5s+1)}$$

Se desea realizar un control discreto empleando un bloqueador de orden cero y realimentación unitaria, siendo el periodo de muestreo elegido de 1segundo.

Encontrar las características de la respuesta ante entrada escalón unitario (para ello aplicar las expresiones del sistema reducido equivalente de segundo orden).

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \frac{0.4z^{-1}}{5} Z \left[\frac{1}{s^2(s+0.2)} \right] = 0.08 \frac{z-1}{z^2} \sum_{\text{Polos}} \text{Residuos} \left[\frac{1}{s^2(s+0.2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

$$G(z) = \frac{0.038(z + 0.905)}{z(z-1)(z-0.819)}$$

Los cálculos del equivalente discreto $G(z)$ pueden verse en el ejercicio 5.6.

Cálculo de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$M(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{\frac{0.038(z + 0.905)}{z(z-1)(z-0.819)}}{1 + \frac{0.038(z + 0.905)}{z(z-1)(z-0.819)}} = \frac{0.038(z + 0.905)}{z(z-1)(z-0.819) + 0.038(z + 0.905)}$$

$$M(z) = \frac{0.038(z + 0.905)}{z^3 - 1.819z^2 + 0.819z + 0.038z + 0.03439} = \frac{0.038(z + 0.905)}{z^3 - 1.819z^2 + 0.857z + 0.03439}$$

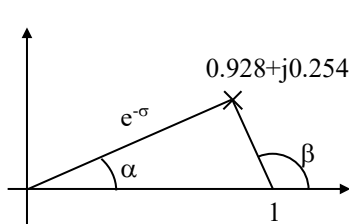
$$M(z) = \frac{0.038(z + 0.905)}{(z + 0.037)((z - 0.928)^2 + 0.254^2)}$$

$$M(z) = \frac{0.038(z + 0.905)}{(z + 0.037)(z^2 - 1.856z + 0.9257)}$$

Se desprecia el polo en $z = -0.037$ por estar muy próximo al origen y ser su influencia en la respuesta total del sistema reducida.

Según el enunciado, se debe considerar el sistema reducido equivalente de segundo orden, por tanto no se considera tampoco la influencia del cero.

La respuesta del sistema ante una entrada escalón, debida exclusivamente a los dos polos complejos conjugados del denominador será:



$$e^{-\sigma} = \sqrt{0.928^2 + 0.254^2} = 0.962 \quad \sigma = -\ln 0.962 = 0.0387$$

$$\alpha = \arctg \frac{0.254}{0.928} = 0.267 \text{ rad}$$

$$\beta = \pi - \arctg \frac{0.254}{1 - 0.928} = 1.847 \text{ rad}$$

$$K_r = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1.847}{0.267} = 6.9 \rightarrow 7 \quad \text{Intervalo de subida : } tr = K_r \cdot T = 7 \cdot 1 = 7 \text{ seg.}$$

$$K_p = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{0.267} = 11.8 \rightarrow 12 \quad \text{Intervalo de pico : } tp = K_p \cdot T = 12 \cdot 1 = 12 \text{ seg.}$$

$$K_s = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{0.0387} = 81.2 \rightarrow 82 \quad \text{Intervalo de establecimiento : } ts = K_s \cdot T = 82 \cdot 1 = 82 \text{ seg.}$$

$$\text{Máximo sobreimpulso : } Mp = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = e^{-\frac{\pi \cdot 0.0387}{0.267}} \cdot 100 = 0.634 \cdot 100 = 63.4\%$$

Para estos cálculos no se ha tenido en cuenta la influencia del cero del numerador de $M(z)$.