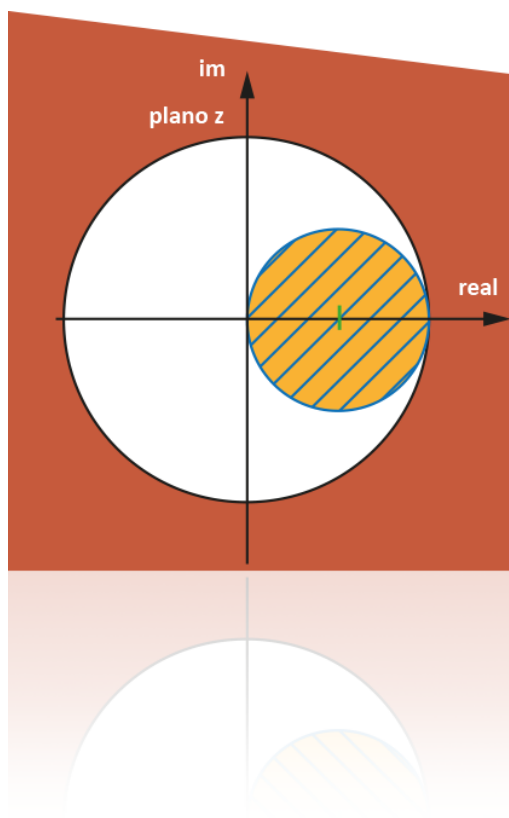


Control por computador

Ejercicios 7



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 7.1

Obtener el lugar de las raíces para el sistema cuya función de transferencia discreta, de lazo abierto, es la siguiente:

$$G(z) = \frac{z + 0.8}{(z + 0.9)(z^2 + z + 0.61)}$$

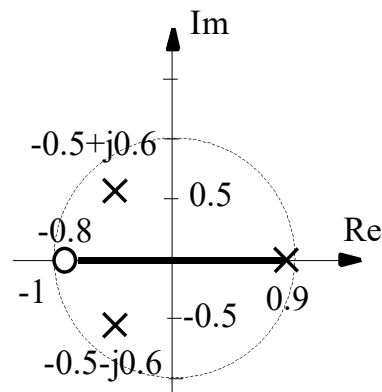
1) Ecuación característica:

$$1 + K \frac{z + 0.8}{(z - 0.9)(z^2 + z + 0.61)} = 0$$

2) Número de ramas: 3.

3) Puntos de inicio: 0.9; $-0.5 \pm j0.6$;
Puntos de finalización: -0.8; dos en infinito.

4) Lugar en eje real:



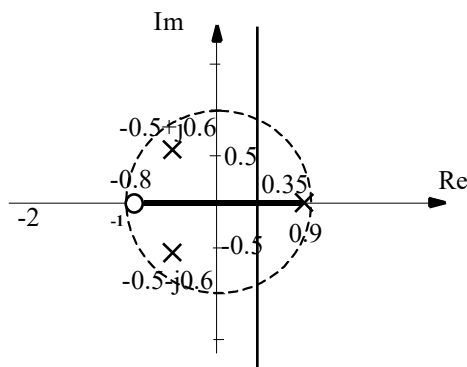
5) Simetría respecto al eje real.

6) Asíntotas:

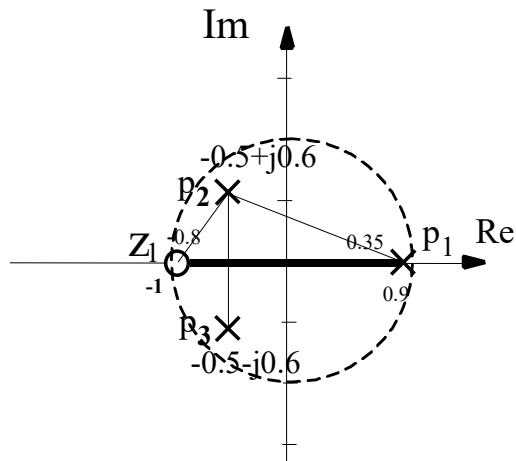
Directo: $\theta_a = \frac{180(2q+1)}{P-Z} = \frac{180(2q+1)}{2} = 90^\circ; 270^\circ;$

7) Centroide:

$$\sigma_o = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Zeros}}{P-Z} = \frac{0.9 - 0.5 - 0.5 + 0.8}{2} = 0.35$$



8) Angulos de salida de polos complejos:



$$\sum \theta_{\text{ceros}} - \sum \theta_{\text{polos}} = 180(2q + 1)$$

$$\theta_{p1} = 180 - \arctg(0.6 / 1.4) = 156.8^\circ$$

$$\theta_{p3} = 90^\circ$$

$$\theta_{z1} = \arctg(0.6 / 0.3) = 63.4^\circ$$

$$63.4 - (156.8 + \theta_{p2} + 90) = 180$$

$$\theta_{p2} = -3.4^\circ$$

9) Llegada y/o salida del eje real: No existen

10) Corte con el círculo unidad:

Ec. característica:

$$z^3 + 0.1z^2 - 0.3z - 0.55 + K(z + 0.8) = 0$$

$$z^3 + 0.1z^2 + (K - 0.3)z + 0.8K - 0.55 = 0$$

$$\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 + 0.1\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + (K - 0.3)\left(\frac{1+s}{1-s}\right) + 0.8K - 0.55 = 0$$

$$(1+s)^3 + 0.1(1+s)^2(1-s) + (K - 0.3)(1+s)(1-s)^2 + (0.8K - 0.55)(1-s)^3 = 0$$

$$(1.15 + 0.2K)s^3 + (1.55 + 1.4K)s^2 + (5.05 - 3.4K)s + 0.25 + 1.8K = 0$$

s^3	$1.15 + 0.2K$	$5.05 - 3.4K$
s^2	$1.55 + 1.4K$	$0.25 + 1.8K$
s	$-5.12K^2 - 0.32K + 7.54$	$1.4K + 1.55$
s^0	$0.25 + 1.8K$	

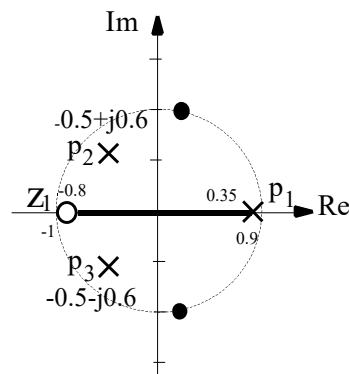
a) $K = -0.138$ (negativo).

b) $K = 1.18$ y $K = -1.24$ (negativo):

$$(1.55 + 1.4K)s^2 + 0.25 + 1.8K = 0 \rightarrow s = 0$$

$$3.2s^2 + 2.37 = 0 \rightarrow s = \pm j0.86$$

$$z = \frac{1+s}{1-s} = \frac{1+j0.86}{1-j0.86} = 0.15 \pm j0.98$$



11) Puntos de corte con el eje imaginario en z:

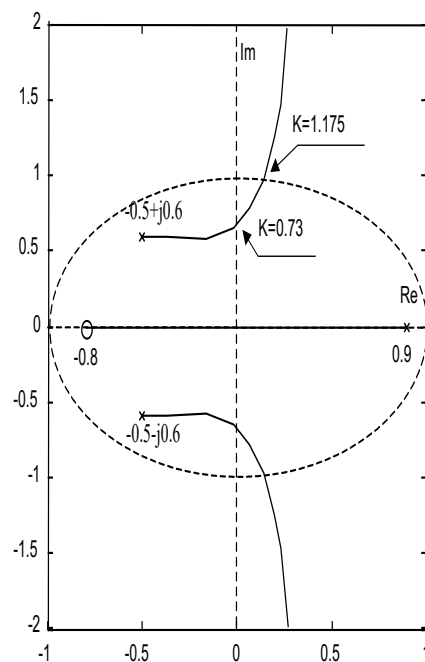
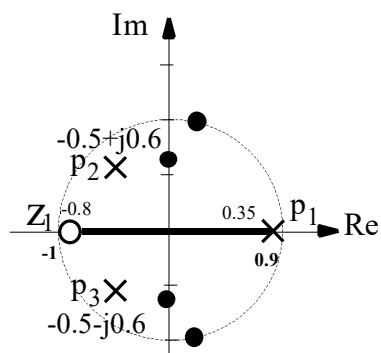
$$z^3 + 0.1z^2 + (K - 0.3)z + 0.8K - 0.55 = 0$$

z^3	1	$K - 3$
z^2	0.1	$0.8K - 0.55$
z	$5.2 - 7K$	
z^0	$0.8K - 0.55$	

a) $K=0.68$: $(5.2 - 7K)z = 0$ $z = 0$

b) $K=0.74$: $0.1z^2 + 0.8K - 0.55 = 0$

$z = \pm j0.65$



EJERCICIO 7.2

Obtener el lugar de las raíces para el sistema cuya función de transferencia discreta, de lazo abierto, es la siguiente:

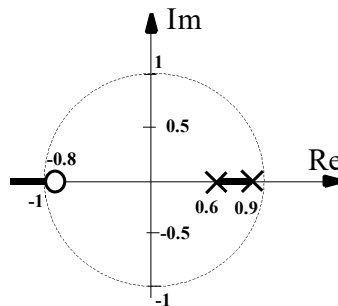
$$G(z) = 0.33 \frac{z + 0.8}{(z - 0.6)(z - 0.9)}$$

1) Ecuación característica: $1 + K \frac{0.33(z + 0.8)}{(z - 0.6)(z - 0.9)} = 0$

2) Número de ramas: 2.

3) Puntos de inicio: 0.6; 0.9;
Puntos de finalización: -0.8; uno en infinito.

4) Lugar en eje real:



5) Simetría.

6) Asíntotas: Directo: $\theta_a = \frac{180(2q+1)}{P-Z} = \frac{180(2q+1)}{1} = 180^\circ;$

7) Centroide: $\sigma_o = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Zeros}}{P-Z} = \frac{0.9 + 0.6 + 0.8}{1} = 2.3$

8) Llegada y/o salida del eje real:

$$K = -\frac{z^2 - 1.5z + 0.54}{0.33(z + 0.8)}$$

$$\frac{dK}{dz} = \frac{1}{0.33} \frac{(2z - 1.5)(z + 0.8) - (z^2 - 1.5z + 0.54)}{(z + 0.8)^2} = 0$$

$$z = -2.34$$

$$z = 0.74$$

10) Puntos de corte círculo unidad:

Por Jury:

$$z^2 + (0.33K - 1.5)z + 0.54 + 0.264K = 0$$

$$P(1) = 1 + 0.33K - 1.5 + 0.54 + 0.264K > 0$$

$$0.595K + 0.04 = 0 \rightarrow K = -0.067 \text{ (negativo).}$$

$$P(-1) = 1 - 0.33K + 1.5 + 0.54 + 0.264K > 0$$

$$-0.066K + 3.04 = 0 \rightarrow K = 46$$

$$z^2 + (0.33 \cdot 46 - 1.5)z + 0.54 + 0.264 \cdot 46 = 0$$

$$z = -12.68 \text{ (imposible)}$$

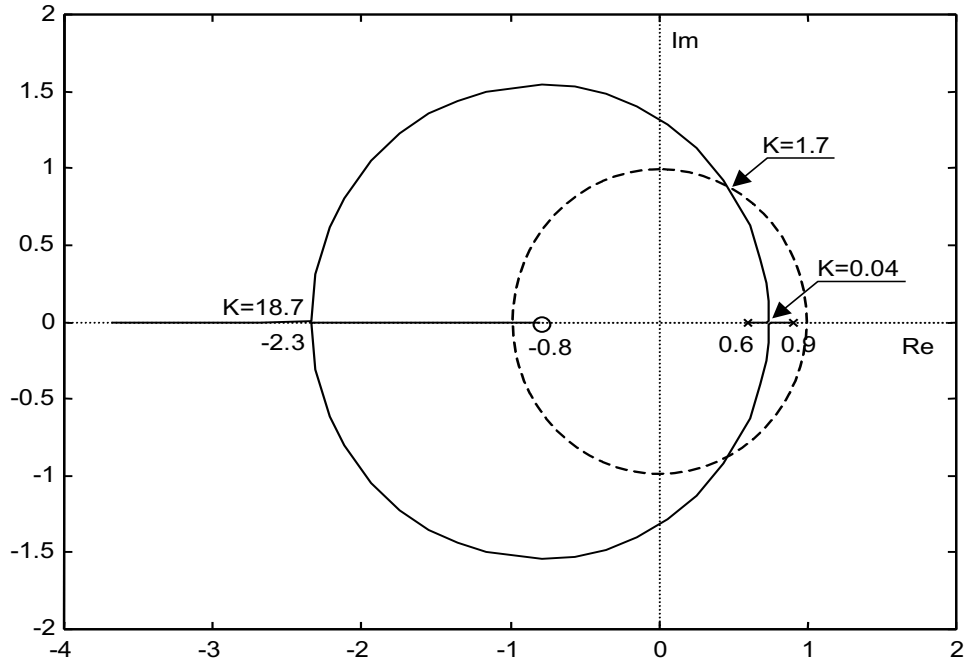
$$z = -1$$

$$1 < |0.54 + 0.264K|$$

$$1 = 0.54 + 0.264K \rightarrow K = 1.74$$

$$z^2 + (0.33 \cdot 1.74 - 1.5)z + 0.54 + 0.264 \cdot 1.74 = 0$$

$$z = -0.45 \pm j0.89$$



EJERCICIO 7.3

Obtener el lugar de las raíces para el sistema cuya función de transferencia discreta, de lazo abierto, es la siguiente:

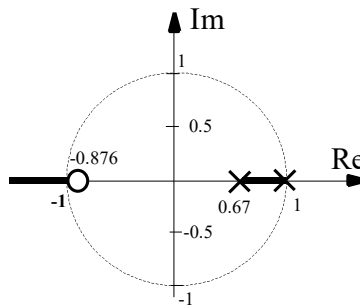
$$G(z) = 0.017 \frac{z + 0.876}{(z - 1)(z - 0.6703)}$$

1) Ecuación característica: $1 + K \frac{0.017(z + 0.876)}{(z - 1)(z - 0.6703)} = 0$

2) Número de ramas: 2.

3) Puntos de inicio: 1; 0.6703;
Puntos de finalización: -0.876; uno en infinito.

4) Lugar en eje real:



5) Simetría.

6) Asíntotas: Directo: $\theta_a = \frac{180(2q+1)}{P-Z} = \frac{180(2q+1)}{1} = 180^\circ;$

7) Centroide: $\sigma_o = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{Zeros}}{P-Z} = \frac{1 + 0.6703 + 0.876}{1} = 2.54$

8) Llegada y/o salida del eje real:

$$K = -\frac{1}{0.017} \frac{z^2 - 1.6703z + 0.6703}{(z + 0.876)}$$

$$\frac{dK}{dz} = -\frac{1}{0.017} \frac{(2z - 1.6703)(z + 0.876) - (z^2 - 1.6703z + 0.6703)}{(z + 0.876)^2} = 0$$

$$z = -2.58$$

$$z = 0.82$$

10) Puntos de corte círculo unidad:

Por Jury: $z^2 + (0.017K - 1.6703)z + 0.6703 + 0.0149K = 0$

$$P(1) = 1 + (0.017K - 1.6703) + 0.6703 + 0.0149K > 0$$

$$0.0319K + 0 = 0 \rightarrow K = 0$$

$$z^2 + (-1.6703)z + 0.6703 = 0$$

$$z = 1$$

$$z = 0.6703 \text{ (imposible)}$$

$$P(-1) = 1 - (0.017K - 1.6703) + 0.6703 + 0.0149K > 0$$

$$-0.0021K + 3.3406 = 0 \rightarrow K = 1590.76$$

$$z^2 + 25.37z + 24.36 = 0$$

$$z = -24.37 \text{ (imposible)}$$

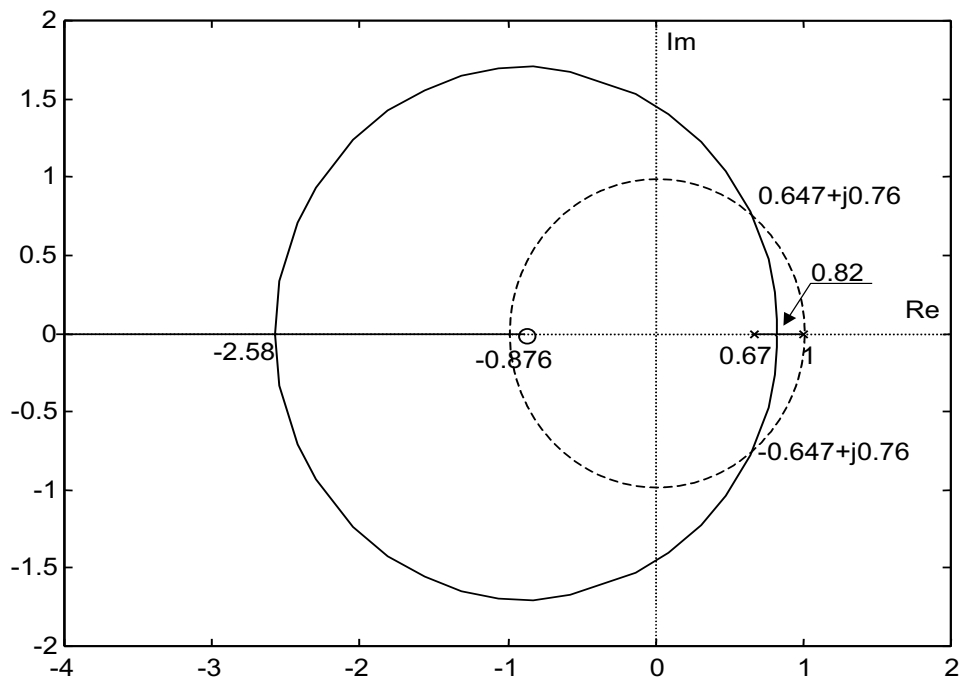
$$z = -1$$

$$1 < |0.6703 + 0.0149K|$$

$$1 = 0.6703 + 0.0149K \rightarrow K = 22.12$$

$$z^2 - 1.294z + 1 = 0$$

$$z = 0.647 \pm j0.76$$

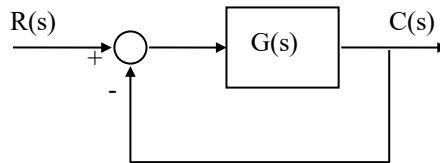


EJERCICIO 7.4

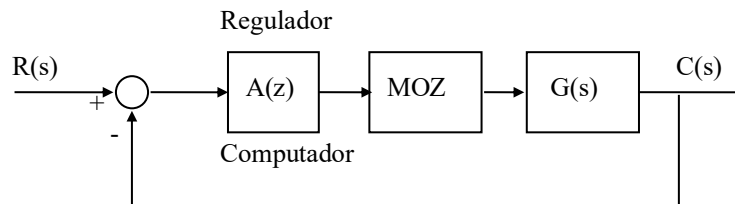
Obtener el lugar de las raíces del sistema discreto equivalente al sistema de control continuo con realimentación unidad, cuya función de transferencia de lazo directo es ($T=0.1$ seg):

$$G(s) = \frac{s+7}{(s+1)(s+2)}$$

El diagrama de bloques del sistema continuo del que se parte es:



Para este sistema el diagrama de bloques del sistema discreto completo será el representado en la figura.



$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{s+7}{s(s+1)(s+2)} \right]$$

$$R_1 = \left(\frac{s+7}{(s+1)(s+2)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right)_{s=0} = \frac{3.5z}{z-1}$$

$$R_2 = \left(\frac{s+7}{s(s+2)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right)_{s=-1} = \frac{-6z}{z-0.904}$$

$$R_3 = \left(\frac{s+7}{s(s+1)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right)_{s=-2} = \frac{2.5z}{z-0.818}$$

$$G(z) = \frac{0.121(z-0.479)}{(z-0.904)(z-0.818)}$$

1) Ecuación característica: $1 + k \cdot G(z) = 0$

2) N° de ramas: 2, una de ellas al infinito.

3) Puntos de inicio: 0.904 y 0.818
Puntos de finalización: 0.479

4) Lugar en el eje real: $[-\infty, 0.479]$ $[0.818, 0.904]$

5) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = 180^\circ$$

$$\sigma_c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{p-z} = \frac{0.904 + 0.818 - 0.479}{2-1} = 1.243$$

6) Llegada y salida del eje real:

$$k = \frac{(z-0.904)(z-0.818)}{0.121(z-0.479)}$$

$$\frac{dk}{dz} = \frac{1}{0.121} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 - 1.722z + 0.739}{z - 0.479} \right) = \frac{1}{0.121} \frac{(2z - 1.722)(z - 0.479) - (z^2 - 1.722z + 0.739)}{(z - 0.479)^2}$$

$$\frac{dk}{dz} = 0 \rightarrow z^2 - 0.958z + 0.085 = 0 \rightarrow \begin{cases} z_1 = 0.859 \rightarrow \text{Pto. de dispersión} \\ z_2 = 0.098 \rightarrow \text{Pto. de confluencia} \end{cases}$$

7) Intersección con el eje imaginario: Aplicando Routh

$$\text{Ecuación característica: } z^2 + (0.121k - 1.722)z + 0.739 - 0.057k = 0$$

z^2	1	$0.739 - 0.057k$
z^1	$0.121k - 1.722$	
z^0	$0.739 - 0.057k$	

$$k = 0.739/0.057 = 12.96 \rightarrow (0.121 \cdot 12.96 - 1.722) \cdot z = 0 \rightarrow z = 0$$

$$k = 1.722/0.121 = 14.23 \rightarrow z^2 + 0.739 - 0.057 \cdot 14.23 = 0 \rightarrow z = \pm 0.268 \text{ No puede ser}$$

Sólo existe una intersección con el eje imaginario en $z=0$

8) Intersección con el círculo unidad aplicando Jury

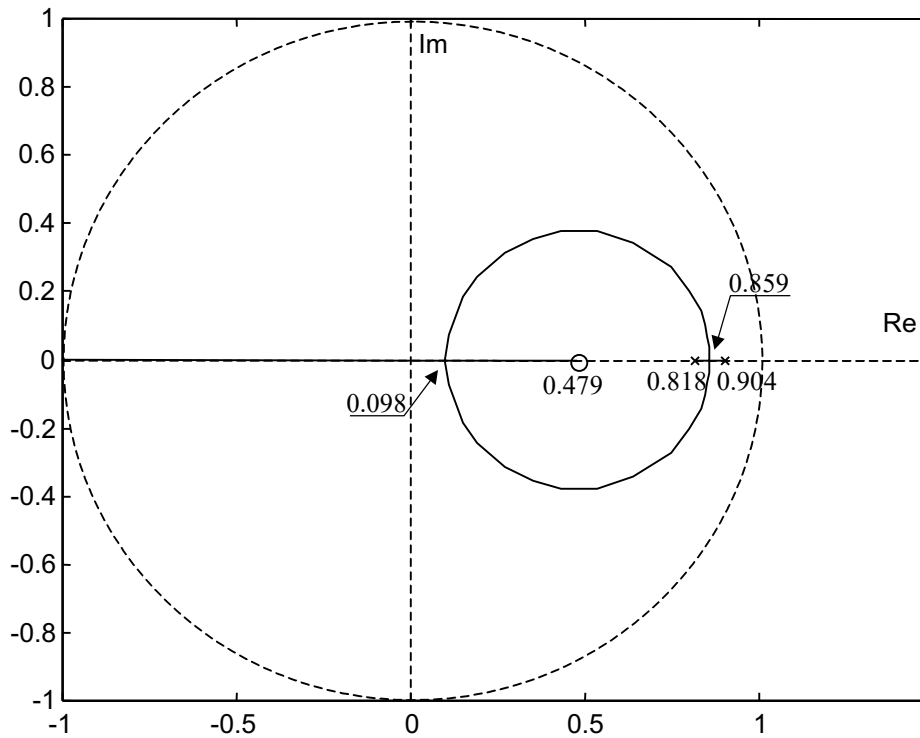
$$p(1) = 1 + 0.121 k - 1.722 + 0.739 - 0.057 k = 0 \quad k = -0.266 \text{ No es posible}$$

$$p(-1) = 1 - 0.121 k + 1.722 + 0.739 - 0.057 k = 0 \quad k = 19.443$$

$$0.739 - 0.057 k = 1 \quad k = -4.579 \text{ No es posible}$$

Sólo existe un punto de corte con el círculo unidad en -1

La representación final del lugar de las raíces es la indicada en la figura.



EJERCICIO 7.5

Para el sistema continuo en lazo cerrado, con realimentación unitaria, cuya función de transferencia de lazo directo es $G(s) = \frac{1}{s^2}$. Calcular el equivalente discreto de la función de transferencia de lazo directo y el lugar de las raíces del sistema. Periodo de muestreo: 1 segundo.

Equivalente discreto:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{1}{s^3} \right]$$

$$R_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{ds^2} \left(s^3 \frac{1}{s^3} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right) \right]_{s=0} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{ze^{Ts}}{(z - e^{Ts})^2} \right) \right]_{s=0} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z T e^{Ts} (z - e^{Ts})^2 - z e^{Ts} 2(z - e^{Ts})(-T e^{Ts})}{(z - e^{Ts})^4} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{z(z-1)^2 + 2z(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \frac{1}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$G(z) = \frac{1}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

Lugar de las raíces:

1) N° de ramas: 2

2) Puntos de inicio: 1 (doble)

Puntos de finalización: -1, ∞

3) Lugar en el eje real: $[-\infty, -1]$

4) Asíntotas.

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{2-1} = 180^\circ$$

5) Puntos de dispersión:

$$1 + k \frac{0.5(z+1)}{(z-1)^2} = 0$$

$$k = - \frac{(z-1)^2}{0.5(z+1)}$$

$$\frac{dk}{dz} = \frac{2(z-1)0.5(z+1) - 0.5(z-1)^2}{0.25(z+1)^2} = 0$$

$$(z-1)(z+1) - 0.5(z-1)^2 = 0$$

$$0.5z^2 + z - 1.5 = 0$$

$$\begin{cases} z = -3 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{No pertenece al lugar}$$

6) Puntos de corte con el eje imaginario aplicando el criterio de Routh:

Ecuación característica: $1 + k \cdot G(z) = 0$

$$z^2 - 2z + 1 + 0.5kz + 0.5k = 0$$

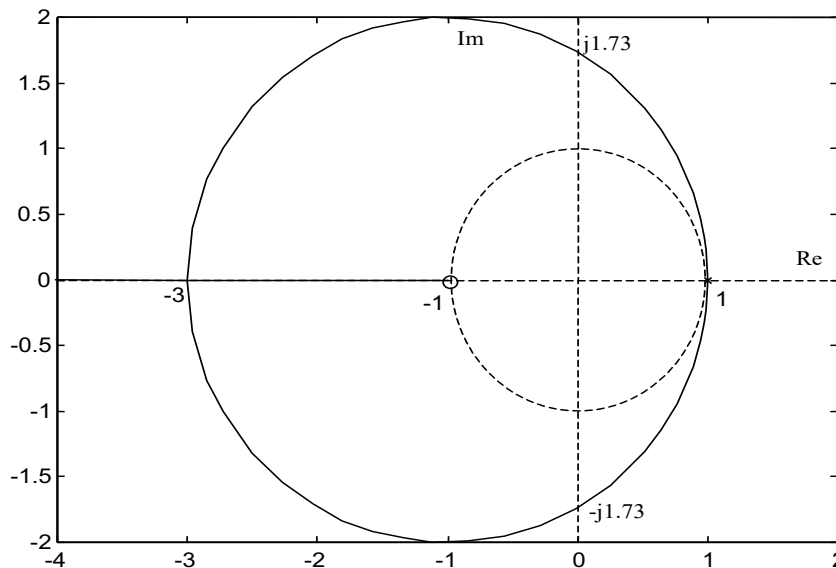
$$z^2 + (0.5k - 2)z + 1 + 0.5k = 0$$

$$\begin{array}{c|c} z^2 & 1 \\ z^1 & 0.5k-2 \\ z^0 & 1+0.5k \end{array}$$

$$\text{a) } 0.5k - 2 = 0 \quad k = 4 \quad z^2 + 1 + 0.5 \cdot 4 = 0 \quad \boxed{z = \pm j1.73}$$

$$\text{b) } 1 + 0.5k = 0 \quad k = -2 \quad (0.5(-2) - 2)z = 0 \quad \boxed{z=0}$$

El lugar de las raíces completo se representa en la siguiente figura.



EJERCICIO 7.6.

Para el sistema de lazo cerrado con realimentación unitaria, donde la función de transferencia del sistema continuo a calcular es:

$$G(s) = \frac{e^{-0.2s}}{s^2 + 2s + 2}$$

Dibujar el lugar de las raíces del sistema discreto equivalente a la planta continua utilizando un mantenedor de orden cero y un periodo de muestreo de 0.1 segundos.

$$G(z) = z^{-2} \frac{(z-1)}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \right] = z^{-2} \frac{(z-1)}{z} \sum_{\text{Res}} \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \frac{z}{z - e^{sT}}$$

$$R_1 = s \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
 R_2 &= (s - (-1 + j)) \frac{1}{s(s - (-1 + j))(s - (-1 - j))} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1+j} = \\
 &= \frac{1}{s(s - (-1 - j))} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1+j} = \frac{1}{(-1 + j)(-1 + j + 1 + j)} \frac{z}{z - e^{(-1+j)T}} = \\
 &= \frac{1}{(-1 + j)2j} \frac{z}{z - e^{-0.1}e^{j0.1}} = \frac{-j(-1 - j)}{2(-1 + j)(-1 - j)} \frac{z}{z - e^{-0.1}e^{j0.1}} = \\
 R_3 &= (s - (-1 - j)) \frac{1}{s(s - (-1 + j))(s - (-1 - j))} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1-j} = \\
 &= \frac{1}{s(s - (-1 + j))} \frac{z}{z - e^{sT}} \Big|_{s=-1-j} = \frac{1}{(-1 - j)(-1 - j + 1 - j)} \frac{z}{z - e^{(-1-j)T}} = \\
 &= \frac{1}{(-1 - j) - 2j} \frac{z}{z - e^{-0.1}e^{-j0.1}} = \frac{j(-1 + j)}{2(-1 - j)(-1 + j)} \frac{z}{z - e^{-0.1}e^{-j0.1}} = \\
 &= \frac{-1 - j}{2(1 + 1)} \frac{z}{z - 0.905(\cos 0.1 - j \sin 0.1)} = \frac{-1 - j}{4} \frac{z}{z - 0.9 + 0.09j} \\
 R_2 + R_3 &= \frac{-1 + j}{4} \frac{z}{z - 0.9 - j0.09} + \frac{-1 - j}{4} \frac{z}{z - 0.9 + j0.09} = \\
 &= \frac{z}{4} \left(\frac{-1 + j}{z - 0.9 - j0.09} + \frac{-1 - j}{z - 0.9 + j0.09} \right) = \\
 &= \frac{z}{4} \left(\frac{(-1 + j)(z - 0.9 + j0.09) + (-1 - j)(z - 0.9 - j0.09)}{(z - 0.9)^2 - 0.09^2} \right) = \\
 &= \frac{z}{4} \left(\frac{-(z - 0.9 + j0.09) + j(z - 0.9 + j0.09) - (z - 0.9 - j0.09) - j(z - 0.9 - j0.09)}{z^2 - 1.8z + 0.818} \right) = \\
 &= \frac{z}{4} \left(\frac{-z + 0.9 - 0.09 - z + 0.9 - 0.09}{z^2 - 1.8z + 0.818} \right) = \frac{z}{4} \cdot \frac{-2z + 1.62}{z^2 - 1.8z + 0.818} \\
 G(z) &= \frac{z-1}{z^3} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{z}{4} \cdot \frac{-2z+1.62}{z^2 - 1.8z + 0.818} \right] = \\
 &= \frac{z-1}{z^2} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2z+1.62}{z^2 - 1.8z + 0.818} \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{z-1}{z^2} \left[\frac{2(z^2 - 1.8z + 0.818) + (z-1)(-2z + 1.62)}{4(z-1)(z^2 - 1.8z + 0.818)} \right] =$$

$$= \frac{2z^2 - 3.6z + 1.636 - 2z^2 + 1.62z + 2z - 1.62}{4z^2(z^2 - 1.8z + 0.818)} = \frac{0.02z + 0.016}{4z^2(z^2 - 1.8z + 0.818)}$$

$$G(z) = \frac{0.005(z + 0.8)}{z^2(z^2 - 1.8z + 0.818)}$$

Lugar de las raíces:

1) N° de ramas: 4

2) Puntos de inicio: 0 (doble), $0.9 \pm j0.089$

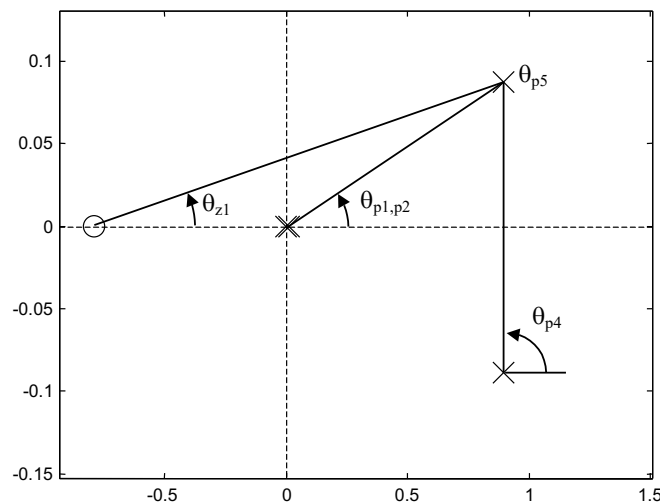
Puntos de finalización: -0.8 , ∞

3) Lugar en el eje real: $[-\infty, -0.8]$

4) Asíntotas: $\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{4-1} = \begin{cases} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{cases}$

$$\sigma_c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{p-z} = \frac{0.9 + j0.089 + 0.9 - j0.089 - (-0.8)}{4-1} = 0.867$$

4) Ángulos de salida de polos complejos conjugados:



$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$\theta_{p1} = \theta_{p2} = 180 - \arctg\left(\frac{0.089}{0.9}\right) = 5.648^\circ$$

$$\theta_{p4} = 90^\circ$$

$$2.997^\circ - (2 \cdot 5.648^\circ + \theta_{p3} + 90^\circ) = 180^\circ$$

$$\theta_{p3} = -278.3 = 81.7^\circ$$

6) Puntos de dispersión:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{2(a-0.9)}{(a-0.9)^2 + 0.089^2} = \frac{1}{a+0.8} \quad a = -1$$

$$\frac{1}{-1} + \frac{1}{-1} + \frac{2(-1-0.9)}{(-1-0.9)^2 + 0.089^2} = \frac{1}{a+0.8} \quad a = -1.128$$

$$\frac{1}{-1.128} + \frac{1}{-1.128} + \frac{2(-1.128-0.9)}{(-1.128-0.9)^2 + 0.089^2} = \frac{1}{a+0.8} \quad a = -1.162$$

7) Puntos de intersección con la circunferencia unidad:

Ecuación característica: $1 + K \cdot G(z) = 0$

$$1 + K \frac{0.005z + 0.004}{z^4 - 1.8z^3 + 0.818z^2} = 0$$

$$z^4 - 1.8z^3 + 0.818z^2 + 0.005Kz + 0.004K = 0$$

Realizando el cambio $z = \frac{1+w}{1-w}$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^4 - 1.8\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 0.818\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 0.005K\frac{1+w}{1-w} + 0.004K = 0$$

$$(1+w)^4 - 1.8(1+w)^3(1-w) + 0.818(1+w)^2(1-w)^2 + 0.005K(1+w)(1-w)^3 + 0.004K(1-w)^4 = 0$$

$$w^4 + 4w^3 + 6w^2 + 4w + 1 + 1.8w^4 + 3.6w^3 - 3.6w - 1.8 + 0.818w^4 - 1.636w^2 + 0.8 + K(-0.005w^4 + 0.01w^3 - 0.01w + 0.005 + 0.004w^4 - 0.016w^3 + 0.024w^2 - 0.016w + 0.004) = 0$$

$$(3.618 - 0.001K)w^4 + (7.6 - 0.006K)w^3 + (4.364 + 0.024K)w^2 + (0.4 - 0.026K)w + 0.018 + 0.009K = 0$$

Se construye la tabla de Routh:

w^4	$3.618-0.001K$	$4.364+0.024K$	$0.018+0.009K$
w^3	$7.6-0.006K$	$0.4-0.026K$	
w^2	A	$0.018+0.009K$	
w^1	B		
w^0	$0.18+0.009K$		

Donde:

$$A = \frac{(7.6 - 0.006K)(4.364 + 0.024K) - (3.618 - 0.001K)(0.4 - 0.026K)}{7.6 - 0.006K}$$

$$A = \frac{-0.00017K^2 + 0.250684K + 31.7192}{7.6 - 0.006K}$$

$$B = 0.4 - 0.026K - \frac{(7.6 - 0.006K)^2(0.018 + 0.009K)}{-0.00017K^2 + 0.250684K + 31.7192}$$

Cálculo de los valores de K:

a) $0.18+0.009K=0$ $K = -20$ Pertenece al lugar inverso de las raíces

b) $B = 0.4 - 0.026K - \frac{(7.6 - 0.006K)^2(0.018 + 0.009K)}{-0.00017K^2 + 0.250684K + 31.7192} = 0$

$$(0.4 - 0.026K)(-0.00017K^2 + 0.250684K + 31.7192) - (7.6 - 0.006K)^2(0.018 + 0.009K) = 0$$

$$0.000004096K^3 - 0.005765632K^2 - 1.242624K + 11.648 = 0$$

$$K = 9.000$$

$$K = 1596.53$$

$$K = -197.906 \text{ Pertenece al lugar inverso de las raíces}$$

Ecuación auxiliar:

$$\frac{-0.00017K^2 + 0.250684K + 31.7192}{7.6 - 0.006K} w^2 + 0.018 + 0.009K = 0$$

Para $K=9$

$$4.5w^2 + 0.099 = 0$$

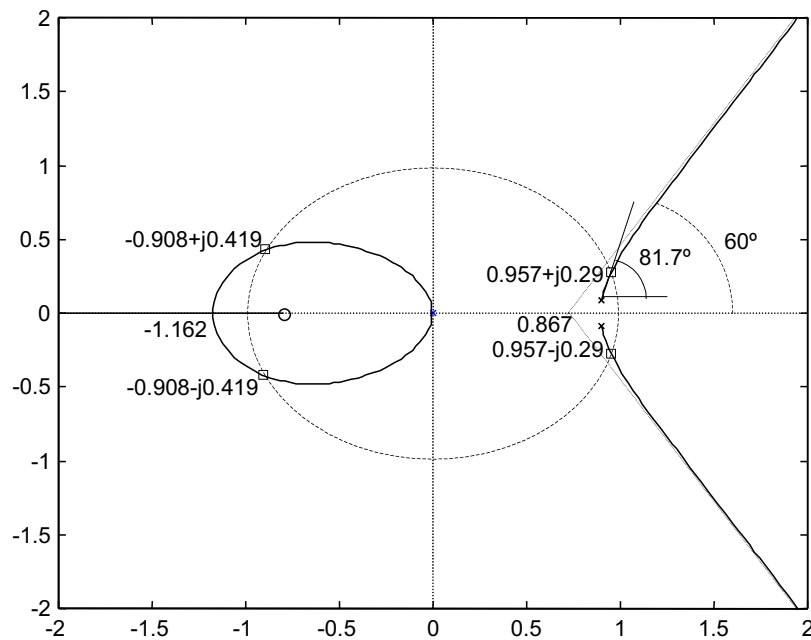
$$w = \pm j0.148$$

$$z = \frac{1+w}{1-w} = \frac{1 \pm j0.148}{1 \mp j0.148} = 0.957 \pm j0.29 = 1_{16.86^\circ}$$

Para $K=1596.53$

$$0.693w^2 + 14.387 = 0 \quad w = \pm j4.556$$

$$z = \frac{1+w}{1-w} = \frac{1 \pm j4.556}{1 \mp j4.556} = -0.908 \pm j0.419 = 1_{155.23^\circ}$$



EJERCICIO 7.7.

Se pretende diseñar el sistema de control de posición de una antena cuyo modelo discreto con mantenedor de orden cero es el siguiente:

$$G(z) = 0.05 \frac{z + 0.96}{(z-1)(z-0.9)}$$

Dibujar el lugar de las raíces del sistema.

- 1) N° de ramas: 2
- 2) Puntos de inicio: 1, 0.9
Puntos de finalización: -0.96, ∞
- 3) Lugar en el eje real: $[-\infty, -0.96]$ y $[0.9, 1]$
- 4) Asíntotas.

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{2-1} = 180^\circ$$

5) Puntos de dispersión y confluencia:

$$1 + k \frac{0.05(z + 0.96)}{(z - 1)(z - 0.9)} = 0$$

$$k = - \frac{(z^2 - 1.9z + 0.9)}{0.05(z + 0.96)}$$

$$\frac{dk}{dz} = - \frac{1}{0.05} \frac{(2z - 1.9)(z + 0.96) - (z^2 - 1.9z + 0.9)}{(z + 0.96)^2} = 0$$

$$2z^2 + 0.02Z - 1.824 - z^2 + 1.9z + 0.9 = 0$$

$$z^2 + 1.92z - 2.724 = 0$$

$$\begin{cases} z = 0.95 & \text{Punto de salida} \\ z = -2.87 & \text{Punto de llegada} \end{cases}$$

6) Puntos de corte con el eje imaginario (Routh):

Ecuación característica: $1 + k \cdot G(z) = 0$;

$$1 + k \frac{0.05(z + 0.96)}{(z - 1)(z - 0.9)} = 0$$

$$z^2 + (0.05k - 1.9)z + 0.048k + 0.9 = 0$$

$$z^2 - 1.9z + 0.9 + k0.05(z + 0.96) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} z^2 & 1 & 0.048k+0.9 \\ z^1 & 0.05k-1.9 & \\ z^0 & 0.048k+0.9 & \end{array}$$

$$\text{a) } 0.05k - 1.9 = 0 \quad k = 38 \quad z^2 + 0.048 \cdot 38 + 0.9 = 0 \quad z = \pm j1.65$$

$$\text{b) } 0.048k + 0.9 = 0 \quad k = -18.75 \quad (0.05(-18.75) - 1.9)z = 0 \quad z = 0$$

7) Cortes con el círculo unidad (Jury):

$$z^2 + (0.05k - 1.9)z + 0.048k + 0.9 = 0$$

$$\text{a) } P(1) = 0 \quad 1 + 0.05k - 1.9 + 0.048k + 0.9 = 0 \quad 0.098k = 0 \quad k = 0$$

$$z^2 + (0.05 \cdot 0 - 1.9)z + 0.048 \cdot 0 + 0.9 = 0$$

$$z^2 - 1.9z + 0.9 = 0$$

$$\begin{cases} z = 1 \\ z = 0.9 \end{cases} \text{ No tiene módulo 1}$$

b) $P(-1) = 0 \quad 1 - 0.05k + 1.9 + 0.048k + 0.9 = 0 \quad 3.8 - 0.002k = 0 \quad k = 1900$

$$z^2 + (0.05 \cdot 1900 - 1.9)z + 0.048 \cdot 1900 + 0.9 = 0$$

$$z^2 + 93.1z + 92.1 = 0$$

$$\begin{cases} z = -1 \\ z = -92.1 \end{cases} \text{ No tiene módulo 1}$$

c) $0.048k + 0.9 = 1 \quad k = 2.08$

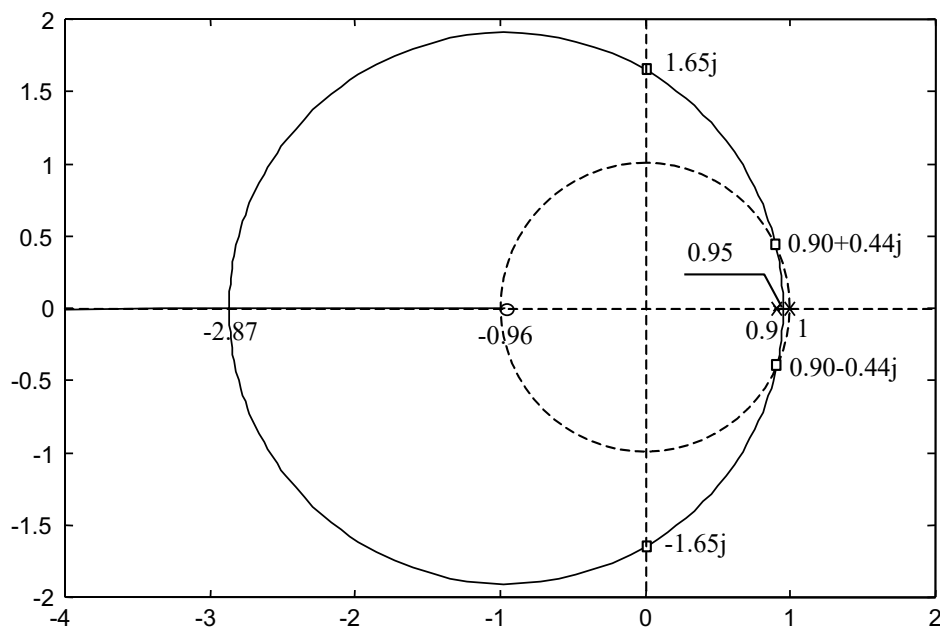
$$z^2 + (0.05 \cdot 2.08 - 1.9)z + 0.048 \cdot 2.08 + 0.9 = 0$$

$$z^2 - 1.796z + 0.9998 = 0$$

$$z = 0.898 \pm j0.440$$

Puntos de corte con la circunferencia unidad: 1, -1 y $0.898 \pm j0.440$

Representación del lugar de las raíces:

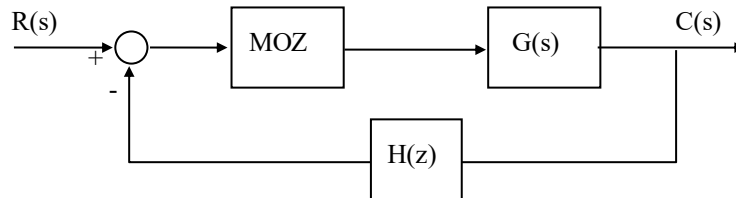


EJERCICIO 7.8.

Un sistema de lazo cerrado está formado por:

$$G_p(s) = \frac{K}{s + \frac{1}{5}} \quad H(s) = e^{-2s}$$

y utiliza un mantenedor de orden cero. Dibujar el lugar de las raíces del sistema cuando varía K, indicando el valor de K en los puntos más significativos. Periodo de muestreo 1 segundos.



$$GH(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) H(s) \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{e^{-2s}}{s(s + \frac{1}{5})} \right] = \frac{z-1}{z} z^{-2} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s + \frac{1}{5})} \right] = \frac{z-1}{z^3} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s + \frac{1}{5})} \right]$$

$$R_1 = \left(s \frac{1}{s(s + \frac{1}{5})} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right)_{s=0} = \left(\frac{1}{s + \frac{1}{5}} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right)_{s=0} = 5 \frac{z}{z-1}$$

$$R_2 = \left((s + \frac{1}{5}) \frac{1}{s(s + \frac{1}{5})} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right)_{s=-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{s} \frac{z}{z - e^s} \right)_{s=-\frac{1}{5}} = -5 \frac{z}{z-0.8187}$$

$$GH(z) = \frac{z-1}{z^3} \left[5 \frac{z}{z-1} - 5 \frac{z}{z-0.8187} \right] = 5 \frac{z-1}{z^2} \frac{(z-0.8187) - (z-1)}{(z-1)(z-0.8187)} = 5 \frac{z-0.8187 - z + 1}{z^2(z-0.8187)}$$

$$GH(z) = \frac{0.9065}{z^2(z-0.8187)}$$

Ecuación característica: $1 + k \cdot GH(z) = 0$

1) N° de ramas: 3, las tres tienden al infinito.

2) Puntos de inicio: 0 (doble) y 0.8187

Puntos de finalización: ∞

3) Lugar en el eje real: $(-\infty, 0.8187]$

4) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{3} = 60^\circ, 180^\circ \text{ y } 300^\circ$$

$$\sigma_c = \frac{\Sigma \text{polos} - \Sigma \text{ceros}}{p-z} = \frac{0.8187}{3} = 0.2729$$

5) Llegada y salida del eje real:

$$k = -\frac{z^2(z-0.8187)}{0.9065}$$

$$\frac{dk}{dz} = \frac{1}{0.9065} \frac{d}{dz} (z^3 - 0.8187z^2) = \frac{1}{0.9065} (3z^2 - 1.6374z)$$

$$\frac{dk}{dz} = 0 \rightarrow 3z^2 - 1.6374z = 0$$

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0.5458 \rightarrow \text{Pto. de dispersión} \end{cases}$$

Valor de K para el punto de dispersión z_2 :

$$K = \frac{-z^2(z-0.8187)}{0.9065} = \frac{-0.5458^2(0.5458-0.8187)}{0.9065} = 0.0897$$

6) Puntos de corte con el círculo unidad:

Ecuación característica: $1 + K \cdot GH(z) = 0$

$$1 + K \frac{0.9065}{z^2(z-0.8187)} = 0$$

$$z^2(z-0.8187) + 0.9065K = 0 \quad z^3 - 0.8187z^2 + 0.9065K = 0$$

Aplicando el cambio $z = \frac{1+w}{1-w}$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 - 0.8187\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + 0.9065K = 0$$

$$(1+w)^3 - 0.8187(1+w)^2(1-w) + 0.9065K(1-w)^3 = 0$$

$$1 + 3w + 3w^2 + w^3 - 0.8187(1 + w - w^2 - w^3) + 0.9065K(1 - 3w + 3w^2 - w^3) = 0$$

$$(1.8187 - 0.9065K)w^3 + (3.8187 + 2.7195K)w^2 + (2.1813 - 2.7195K)w + (0.1813 + 0.9065K) = 0$$

Tabla de Routh:

w^3	$1.8187 - 0.9065K$	$2.1813 - 2.7195K$
w^2	$3.8187 + 2.7195K$	$0.1813 + 0.9065K$
w^1	$\frac{-6.5739K^2 - 5.9372K + 8}{3.8187 + 2.7195K}$	0
w^0	$0.1813 + 0.9065K$	

$$0.1813 + 0.9065K = 0 \quad K = 0.2 \quad w = 0 \quad z = \frac{1+w}{1-w} = 1$$

$$\frac{-6.5739K^2 - 5.9372K + 8}{3.8187 + 2.7195K} = 0$$

$$-6.5739K^2 - 5.9372K + 8 = 0$$

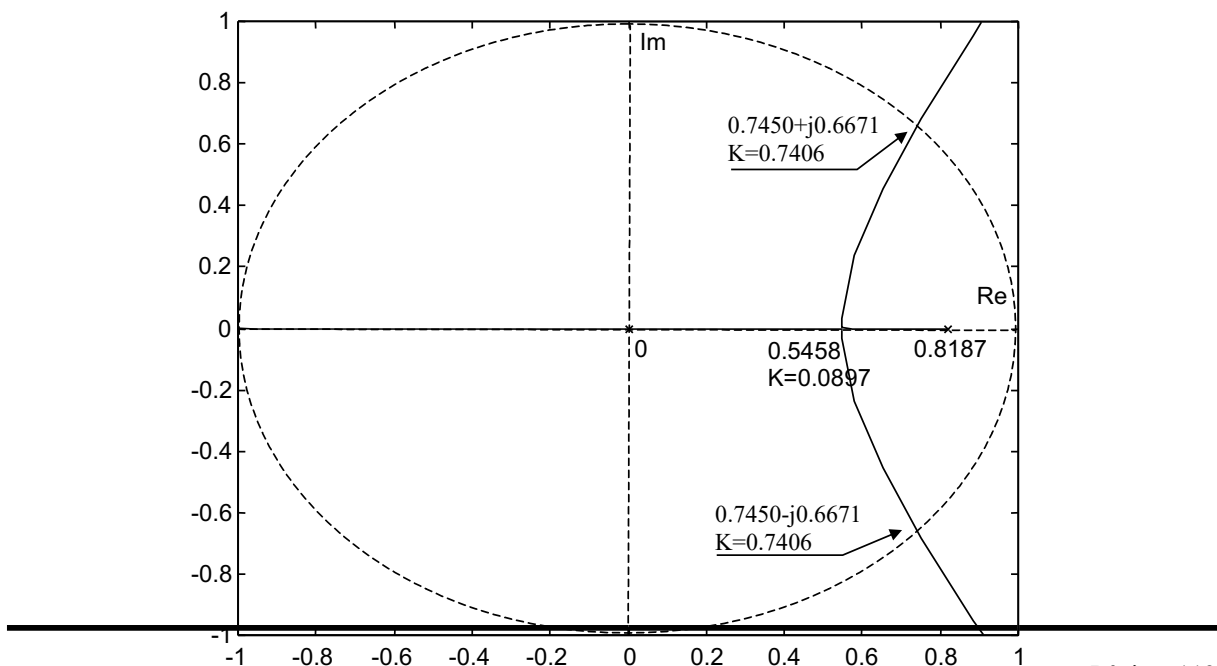
$$\begin{cases} K_1 = 0.7404 \\ K_2 = -1.6436 \end{cases}$$

Ecuación auxiliar:

$$(3.8187 + 2.7195 \cdot 0.7404)w^2 + 0.1813 + 0.9065 \cdot 0.7404 = 0$$

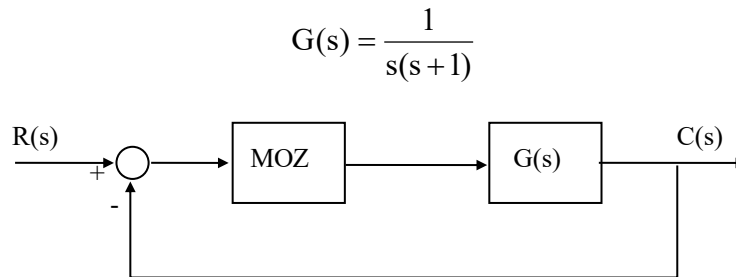
$$5.8322 w^2 + 0.8525 = 0 \quad w = \pm j0.3824 \quad z = \frac{1 \pm 0.3824j}{1 \mp 0.3824j} = 0.7449 \pm 0.6672j = 1_{\pm 41.85^\circ}$$

El lugar de las raíces completo del sistema se muestra en la figura.



EJERCICIO 7.9.

Para el sistema mostrado en la figura calcular el equivalente discreto utilizando periodo de muestreo de 1 segundo y dibujar el lugar de las raíces. Encontrar el valor positivo de K, tal que los polos del sistema sean iguales. Calcular la constante de tiempo de dichos polos.



Cálculo del equivalente discreto:

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right]$$

$$R_1 = \frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right) \Bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right) \Bigg|_{s=0} =$$

$$= \frac{-z \left[(z - e^{sT}) + (s+1)(-Te^{sT}) \right]}{(s+1)^2 (z - e^{Ts})^2} \Bigg|_{s=0} = \frac{-z(z-2)}{(z-1)^2}$$

$$R_2 = \left((s+1) \frac{1}{s^2(s+1)} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right) \Bigg|_{s=-1} = \left(\frac{1}{s^2} \frac{z}{z - e^{Ts}} \right) \Bigg|_{s=-1} = \frac{z}{z - e^{-1}} = \frac{z}{z - 0.3679}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{-z(z-2)}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-0.3679} \right] = \left[\frac{-(z-2)}{(z-1)} + \frac{z-1}{z-0.3679} \right] =$$

$$= \frac{-(z-2)(z-0.3679) + (z-1)^2}{(z-1)(z-0.3679)} = \frac{-(z^2 - 0.3679z - 2z + 0.7358)(z^2 - 2z + 1)}{(z-1)(z-0.3679)}$$

$$G(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{(z-1)(z-0.3679)}$$

$$G(z) = \frac{0.3679(z + 0.7181)}{(z-1)(z-0.3679)}$$

Lugar de las raíces:

Ecuación característica: $1 + k \cdot G(z) = 0$

- 1) N° de ramas: 2, una de ellas al infinito.
- 2) Puntos de inicio: 1 y 0.3679
Puntos de finalización: -0.7181 y ∞
- 2) Lugar en el eje real: $[-\infty, 0.7181]$ y $[0.3679, 1]$
- 3) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{2-1} = 180^\circ$$

8) Llegada y salida del eje real:

$$k = -\frac{(z-1)(z-0.3679)}{0.3679(z+0.7181)}$$

$$\frac{dk}{dz} = \frac{-1}{0.3679} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2 - 1.3679z + 0.3679}{z + 0.7181} \right) =$$

$$\frac{-1}{0.3679} \frac{(2z - 1.3679)(z + 0.7181) - (z^2 - 1.3679z + 0.3679)}{(z + 0.7181)^2} =$$

$$\frac{dk}{dz} = 0 \rightarrow (2z - 1.3679)(z + 0.7181) - (z^2 - 1.3679z + 0.3679) = 0$$

$$2z^2 + 0.0683z - 0.9823 - z^2 + 1.3679z - 0.3679 = 0$$

$$z^2 + 1.4362z - 1.3502 = 0$$

$$\begin{cases} z_1 = 0.6479 \rightarrow \text{Pto. de dispersión} \\ z_2 = -2.0841 \rightarrow \text{Pto. de confluencia} \end{cases}$$

Los polos del sistema serán iguales, es decir, dobles en el punto de dispersión y confluencia.

Para el punto de dispersión el sistema de lazo cerrado presenta dos polos en $z=0.6479$, para este punto el valor de la ganancia será:

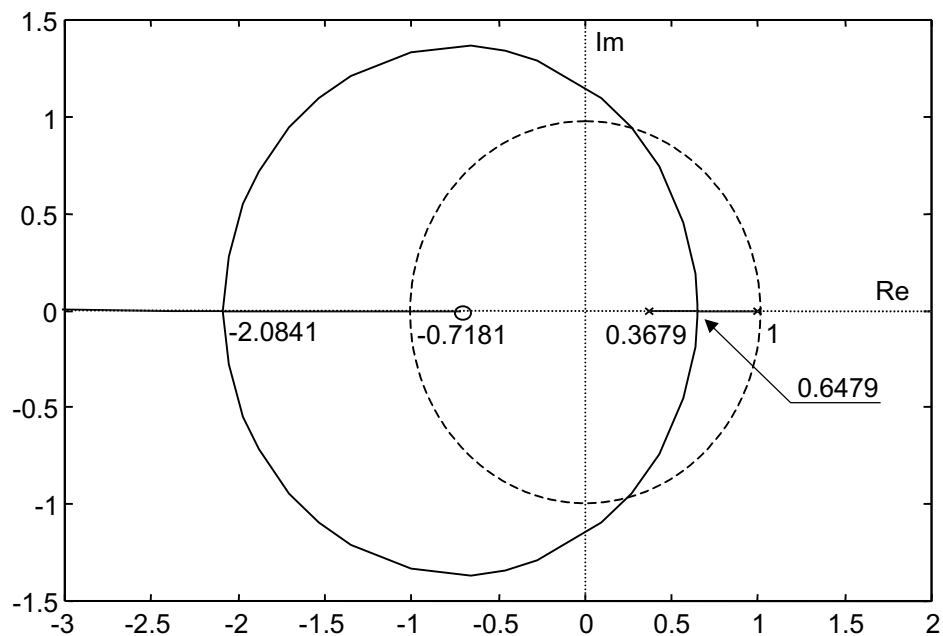
$$K = \left| \frac{1}{G(z)} \right|_{z=0.6479} = \left| \frac{(z-1)(z-0.3679)}{0.3679(z+0.7181)} \right|_{z=0.6479} = \left| \frac{(0.6479-1)(0.6479-0.3679)}{0.3679(0.6479+0.7181)} \right| = 0.1962$$

Para el punto de confluencia el sistema de lazo cerrado presenta dos polos en $z=-2.0841$, para este punto el valor de la ganancia será:

$$K = \left| -\frac{1}{G(z)} \right|_{z=-2.0841} = \left| -\frac{(z-1)(z-0.3679)}{0.3679(z+0.7181)} \right|_{z=-2.0841}$$

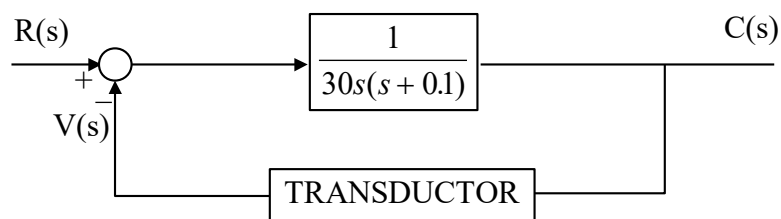
$$K = \left| -\frac{(-2.0841-1)(-2.0841-0.3679)}{0.3679(-2.0841+0.7181)} \right| = 15.0476$$

En este caso al estar los polos fuera del círculo unidad el sistema de lazo cerrado presenta un polo doble inestable.



EJERCICIO 7.10.

La figura muestra un sistema de control de dióxido de carbono para una cámara medioambiental usada para estudiar el crecimiento de las plantas.



El transductor lineal se ha calibrado para proporcionar una tensión v de 5V cuando la concentración de dióxido de carbono c es de 400 ppm, y se sabe que tiene un retardo de 10 segundos, requerido por la instrumentación para analizar una muestra de aire y determinar su contenido de dióxido de carbono.

Se desea controlar por computador dicha planta utilizando un periodo de muestreo 5 segundos.

- Encontrar la función de transferencia del transductor $\frac{V(s)}{C(s)}$.
- Dibujar el diagrama de bloques del sistema discreto equivalente indicando funciones de transferencia y variables.
- Dibujar el lugar de las raíces.

Por ser lineal la relación entre la concentración de dióxido de carbono y la tensión de salida, la función de transferencia será de la forma $V(s) = K \cdot C(s)$, y como además el transductor posee un retardo de 10 segundos, esto corresponderá a añadir un término de la forma e^{-10s} .

La relación de proporcionalidad K se obtiene de una salida de 5 voltios para un concentración de entrada de 400 ppm.

Luego la forma final de la función de transferencia del transductor será:

$$\boxed{\frac{V(s)}{C(s)} = \frac{5}{400} e^{-10s}}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \sum \operatorname{Re} s \frac{G(s)}{s} = (1 - z^{-1}) \sum \operatorname{Re} s \frac{1}{30s^2(s + 0.1)} = \frac{z-1}{30z} \sum \operatorname{Re} s \frac{1}{s^2(s + 0.1)}$$

$$R_1 = \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2(s + 0.1)} \frac{1}{1 - e^{sT} \cdot z^{-1}} \right]_{s=0} = - \frac{(1 - e^{sT} \cdot z^{-1}) + (s + 0.1)(-e^{sT} \cdot z^{-1} \cdot T)}{(s + 0.1)^2 (1 - e^{sT} \cdot z^{-1})^2} =$$

$$= \frac{-(1 - z^{-1}) + z^{-1} \cdot 0.5}{0.01(1 - z^{-1})^2} = \frac{1.5z^{-1} - 1}{0.01(1 - z^{-1})^2} = 100 \frac{(1.5 - z)z}{(z - 1)^2}$$

$$R_2 = (s + 1) \frac{1}{s^2(s + 1)} \frac{1}{1 - e^{sT} z^{-1}} \Big|_{s=-0.1} = \frac{100z}{z - 0.6065}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{30z} \left[100 \frac{(1.5 - z)z}{(z - 1)^2} + 100 \frac{z}{z - 0.6065} \right] = \frac{100}{30} \left[\frac{1.5 - z}{z - 1} + \frac{z - 1}{z - 0.6065} \right] =$$

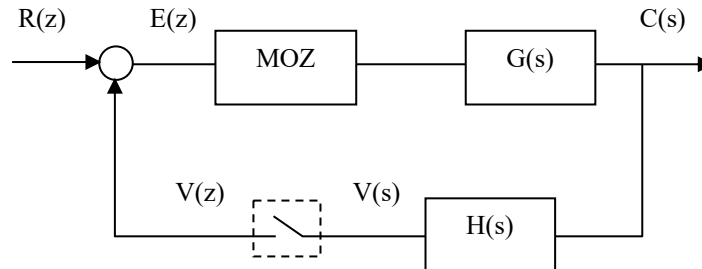
$$= \frac{10}{3} \frac{(1.5 - z)(z - 0.6065) + (z - 1)^2}{(z - 1)(z - 0.6065)} = \frac{10}{3} \frac{1.5z - 0.9098 - z^2 + 0.6065z + z^2 - 2z + 1}{(z - 1)(z - 0.6065)} =$$

$$\boxed{G(z) = \frac{0.355(z + 0.8469)}{(z - 1)(z - 0.6065)}}$$

Para el equivalente discreto del lazo abierto:

$$\begin{aligned}
 GH(z) &= (1 - z^{-1}) \sum \operatorname{Re} s \frac{GH(s)}{s} = (1 - z^{-1}) \sum \operatorname{Re} s \frac{5e^{-10s}}{400 \cdot 30s^2(s + 0.1)} = \\
 &= \frac{(z-1)z^{-2}}{2400z} \sum \operatorname{Re} s \frac{1}{s^2(s + 0.1)} = \frac{(z-1)}{2400z^3} \sum \operatorname{Re} s \frac{1}{s^2(s + 0.1)} \\
 GH(z) &= \frac{z-1}{2400z^3} \left[100 \frac{(1.5-z)z}{(z-1)^2} + 100 \frac{z}{z-0.6065} \right] = \\
 &= \frac{100}{2400 \cdot z^2} \left[\frac{1.5-z}{z-1} + \frac{z-1}{z-0.6065} \right] = \frac{1}{24} \frac{0.1065z + 0.0902}{z^2(z-1)(z-0.6065)} \\
 \boxed{GH(z) = \frac{0.0044(z + 0.8469)}{z^2(z-1)(z-0.6065)}}
 \end{aligned}$$

El diagrama de bloques del sistema discreto se muestra en la figura:



Lugar de las raíces:

- 1) N° de ramas: 4
- 2) Puntos de inicio: 0 (doble), 0.6065, 1
- 3) Puntos de finalización: -0.8469, ∞
- 4) Lugar en el eje real: $[-\infty, -0.8469]$ y $[0.6065, 1]$
- 5) Asíntotas:

$$\begin{aligned}
 \theta_a &= \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{4-1} = \begin{cases} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{cases} \\
 \sigma_c &= \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{p-z} = \frac{0 + 0 + 1 + 0.6065 - (-0.8469)}{4-1} = 0.8178
 \end{aligned}$$

6) Puntos de dispersión y confluencia:

$$K = -\frac{z^2(z-1)(z-0.6065)}{0.0044(z+0.8469)} = \frac{-1}{0.0044} \frac{z^4 - 1.6065z^3 + 0.6065z^2}{z + 0.8469}$$

$$\frac{dK}{dz} = 0$$

$$(4z^3 - 4.8195z^2 + 1.213z)(z + 0.8469) - (z^4 - 1.6065z^3 + 0.6065z^2) = 0$$

$$3z^4 + 0.1746z^3 - 3.4751z^2 + 1.0273z = 0$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0.3331 \text{ No pertenece al lugar directo de las raíces.}$$

$$z_3 = 0.8370$$

$$z_4 = -1.2283$$

7) Cortes con la circunferencia unidad:

Ecuación característica:

$$1 + k \cdot \frac{0.0044(z + 0.8469)}{z^2(z-1)(z-0.6065)} = 0$$

$$z^2(z-1)(z-0.6065) + 0.0044k(z+0.8469) = 0$$

$$z^4 - 1.6065z^3 + 0.6065z^2 + (0.0044z + 0.00372636)k = 0$$

Para aplicar el criterio de Routh se realiza el cambio: $z = \frac{1+w}{1-w}$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^4 - 1.6065\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + 0.6065\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + \left[0.0044\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + 0.00372636\right]k = 0$$

$$(1+w)^4 - 1.6065(1+w)^3(1-w) + 0.6065(1+w)^2(1-w)^2 + \left[0.0044(1+w)(1-w)^3 + 0.00372636k(1-w)^4\right]k = 0$$

$$\begin{aligned} & 3.213w^4 + 7.213w^3 + 4.787w^2 + 0.787w + \\ & + (-0.00067364w^4 - 0.00610544w^3 + 0.02235816w^2 - 0.02370544w + 0.00812636)k = 0 \\ & (3.213 - 0.00067364k)w^4 + (7.213 - 0.00610544k)w^3 + (4.787 + 0.02235816k)w^2 + \\ & + (0.787 - 0.02370544k)w + 0.00812636k = 0 \end{aligned}$$

Tabla de Routh:

w^4	3.213-0.00067364k	4.787+0.02235816k	0.00812636k
w^3	7.213-0.00610544k	0.787-0.02370544k	
w^2	a	0.00812636k	
w^1	b		
w^0	0.00812636k		

$$a = \frac{(7.213 - 0.00610544k)(4.787 + 0.02235816k) - (3.213 - 0.00067364k)(0.787 - 0.02370544k)}{7.213 - 0.00610544k} =$$

$$= \frac{-0.0001524753k^2 + 0.2087384k + 32}{7.213 - 0.00610544k}$$

$$b = 0.787 - 0.02370544k - \frac{(7.213 - 0.00610544k)^2(0.00812636k)}{-0.0001524753k^2 + 0.2087384k + 32}$$

Analizando la tabla :

1) $0.00812636k = 0 \quad k = 0 \quad w = 0 \quad z = 1$

2) $b = 0.787 - 0.0236k - \frac{(7.213 - 0.006k)^2(0.0081k)}{-0.00014972k^2 + 0.2077843k + 32} = 0$

$$(0.787 - 0.02370544k)(-0.0001524753k^2 + 0.2087384k + 32) - (7.213 - 0.00610544k)^2(0.00812636k) = 0$$

$$0.000003311573k^3 - 0.004352488k^2 - 1.01709k + 25.184 = 0$$

$$k = 22.61068$$

$$k = 1513.885$$

$$k = -222.1692$$

Sustituyendo en la ecuación auxiliar formada por la fila anterior:

$$\left(\frac{-0.0001524753k^2 + 0.2087384k + 32}{7.213 - 0.00610544k} \right) w^2 + 0.00812636k = 0$$

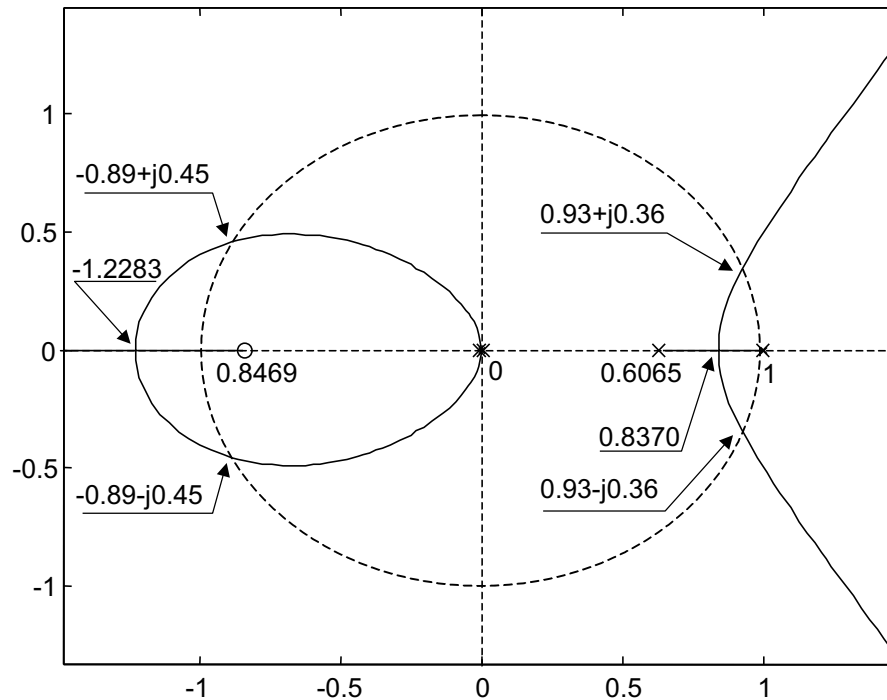
Para $k=22.6168$: $5.179083w^2 + 0.1837425 = 0 \quad w = \pm j0.1883555$

$$z = \frac{1+w}{1-w} = \frac{1 \pm j0.1883555}{1 \mp j0.1883555} \quad z = 0.93 \pm j0.36$$

Para $k=1513.885$: $0.7114749w^2 + 12.30237 = 0 \quad w = \pm j4.158289$

$$z = \frac{1+w}{1-w} = \frac{1 \pm j4.158289}{1 \mp j4.158289} \quad z = -0.89 \pm j0.45$$

La figura muestra la forma final del lugar de las raíces:



EJERCICIO 7.11

Siendo $G(s)$ la función de transferencia de lazo abierto, dibujar el lugar de las raíces del sistema de lazo cerrado, aplicando un mantenedor de primer orden para la función de transferencia del equivalente discreto de la planta.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Periodo de muestreo: $T = 0.1 \text{ seg}$

El cálculo del equivalente discreto aplicando un mantenedor de primer orden puede verse en el ejercicio 3.7

$$G(z) = \frac{0.0058(z - 0.3530)(z + 1.3185)}{z(z - 0.8187)(z - 0.9048)}$$

Ecuación característica: $1 + k \cdot G(z) = 0$

1) N° de ramas: 3, una de ellas al infinito.

- 1) Puntos de inicio: 0 , 0.8187 y 0.9048
 Puntos de finalización: 0.3530 y -1.3185
 3) Lugar en el eje real: $[-\infty, 1.3185]$ $[0, 0.3530]$ $[0.8187, 0.9048]$
 4) Asíntotas:

$$\theta_a = \frac{180(2q+1)}{p-z} = \frac{180(2q+1)}{3-2} = 180^\circ$$

- 5) Llegada y salida del eje real:

$$K = -\frac{z(z-0.8187)(z-0.9048)}{0.0058(z^2+0.9655z-0.4655)} = -\frac{z^3-1.7235z^2+0.7408z}{0.0058(z^2+0.9655z-0.4655)}$$

$$\frac{dK}{dz} = 0$$

$$\frac{-(3z^2-3.447z+0.7408)(z^2+0.9655z-0.4655) + (z^3-1.7235z^2+0.7408z)(2z+0.9655)}{0.0058(z^2+0.9655z-0.4655)^2} = 0$$

$$z^4 + 1.931z^3 - 3.8013z^2 + 1.6046z - 0.3448 = 0$$

$$\begin{cases} z_1 = 0.8606 & \text{Punto de dispersión} \\ z_2 = -3.2586 & \text{Punto de confluencia} \\ z_{3,4} = 0.2335 \pm j0.2616 \end{cases}$$

- 6) Intersección con el círculo unidad:

Ecuación característica:

$$1 + K \cdot \frac{0.0058(z^2+0.9655z-0.4655)}{z^3-1.7235z^2+0.7408z} = 0$$

$$z^3 - 1.7235z^2 + 0.7408z + K \cdot 0.0058(z^2 + 0.9655z - 0.4655) = 0$$

$$z^3 + (0.0058K - 1.7235)z^2 + (0.0056K + 0.7408)z - 0.0027K = 0$$

Realizando el cambio: $z = \frac{1+w}{1-w}$

$$\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^3 + (0.0058K - 1.7235)\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + (0.0056K + 0.7408)\left(\frac{1+w}{1-w}\right) - 0.0027K = 0$$

$$(1+w)^3 + (0.0058K - 1.7235)(1+w)^2(1-w) + (0.0056K + 0.7408)(1+w)(1-w)^2 - 0.0027K(1-w)^3 = 0$$

$$w^3 + 3w^2 + 3w + 1 + (0.0058K - 1.7235)(-w^3 - w^2 + w + 1) + (0.0056K + 0.7408)(w^3 - w^2 - w + 1) - 0.0027K(-w^3 + 3w^2 - 3w + 1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 &w^3(1 - 0.0058K + 1.7235 + 0.0056K + 0.7408 + 0.0027K) + \\
 &+ w^2(3 - 0.0058K + 1.7235 - 0.0056K - 0.7408 - 0.0081K) + \\
 &+ w(3 + 0.0058K - 1.7235 - 0.0056K - 0.7408 + 0.0081K) + \\
 &+ 1 + 0.0058K - 1.7235 + 0.0056K + 0.7408 - 0.0027K = 0
 \end{aligned}$$

$$w^3(3.4643 + 0.0025K) + w^2(3.9827 - 0.0195K) + w(0.5357 + 0.0083K) + 0.0173 + 0.0087K = 0$$

w^3	$3.4643 + 0.0025K$	$0.5357 + 0.0083K$
w^2	$3.9827 - 0.0195K$	$0.0173 + 0.0087K$
w^1	$0.5357 + 0.0083K - \frac{(3.4643 + 0.0025K)(0.0173 + 0.0087K)}{3.9827 - 0.0195K}$	
w^0	$0.0173 + 0.0087K$	

a) $0.0173 + 0.0087K = 0 \quad K = -1.9885$ pertenece al lugar inverso

b) $0.5357 + 0.0083K - \frac{(3.4643 + 0.0025K)(0.0173 + 0.0087K)}{3.9827 - 0.0195K} = 0$

$$\begin{aligned}
 &(0.5357 + 0.0083K)(3.9827 - 0.0195K) - (3.4643 + 0.0025K)(0.0173 + 0.0087K) = 0 \\
 &0.0001836K^2 + 0.0075724K - 2.0736 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} K_1 = 87.6341 \\ K_2 = -128.8781 \end{cases}$$

Para $K=87.6341$ se forma la ecuación auxiliar:

$$(3.9827 - 0.0195 \cdot 87.6341)w^2 + (0.0173 + 0.0087 \cdot 87.6341) = 0$$

$$2.2738w^2 + 0.7797 = 0 \quad w = \pm j 0.5856$$

Deshaciendo el cambio:

$$z = \frac{1+w}{1-w} = \frac{1+j0.5856}{1-j0.5856} = 0.49 \pm j0.87 = 1_{60.7^\circ}$$

6) Intersección con el eje imaginario: Aplicando Routh

Ecuación característica: $z^3 + (0.0058K - 1.7235)z^2 + (0.0056K + 0.7408)z - 0.0027K = 0$

z^3	1	$0.0056K + 0.7408$
z^2	$0.0058K - 1.7235$	$-0.0027K$
z^1	$0.0056K + 0.7408 + \frac{0.0027K}{0.0058K - 1.7235}$	
z^0	$-0.0027K$	

a) $-0.0027K = 0 \quad K=0 \quad z=0$

$$b) \quad 0.0056K + 0.7408 + \frac{0.0027K}{0.0058K - 1.7235} = 0$$

$$(0.0056K + 0.7408)(0.0058K - 1.7235) + 0.0027K = 0$$

$$0.00003248K^2 - 0.00265496K - 1.276769 = 0$$

$$\begin{cases} K_1 = -161.564 \\ K_2 = 243.3054 \end{cases}$$

Formando la ecuación auxiliar:

$$(0.0058 \cdot 243.3054 - 1.7235) z^2 - 0.0027 \cdot 243.3054 = 0$$

$$0.31233 z^2 + 0.65692 = 0 \quad z = \pm j 1.45$$

La figura muestra el lugar de las raíces completo del sistema:

