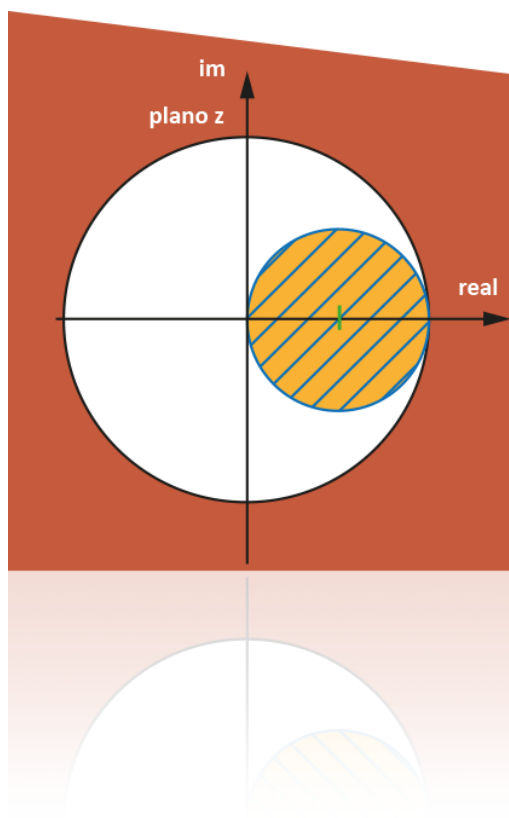


Control por computador

Ejercicios 9



Profesores

José Ramón Llata

Esther González Sarabia

José Joaquín Sainz Gutiérrez

Jesús Arce Hernando

María Sandra Robla Gómez

Luciano Alonso Rentería

Departamento de Tecnología Electrónica e Ing. Sistemas y Automática (TEISA)

EJERCICIO 9.1

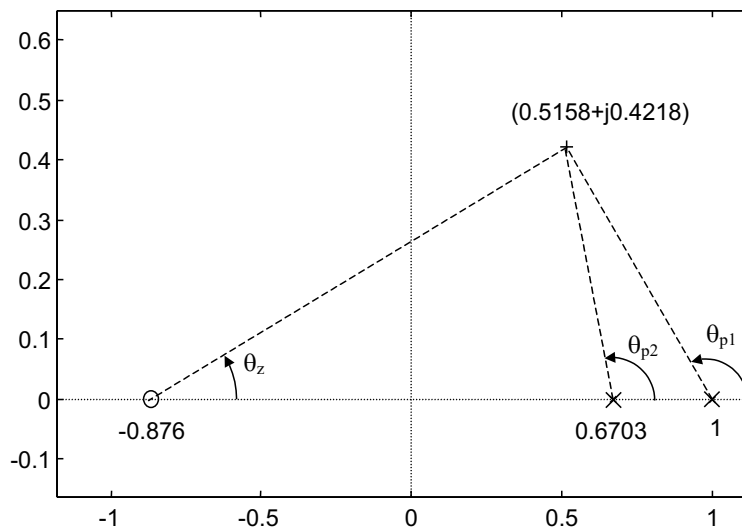
Se tiene un sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es la siguiente:

$$G(z) = 0.017 \frac{z + 0.876}{(z - 1)(z - 0.6703)}$$

Diseñar un controlador del tipo $D(z) = K \frac{z + \alpha}{z + \beta}$ para que las raíces del lazo cerrado del sistema se sitúen en el punto:

$$p = 0.5158 \pm j0.4218$$

El cálculo del lugar de las raíces del sistema inicial puede verse en el ejercicio 7.3.



$$\theta_{p1} = 180^\circ - \arctg \frac{0.4218}{1 - 0.5158} = 138.52^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - \arctg \frac{0.4218}{0.6703 - 0.5158} = 109.84^\circ$$

$$\theta_z = \arctg \frac{0.4218}{0.876 + 0.5158} = 17.10^\circ$$

Suma de contribuciones en P:

$$\sum \theta_{\text{ceros}} - \sum \theta_{\text{polos}} = 17.10 - 138.52 - 109.84 = -231.26^\circ$$

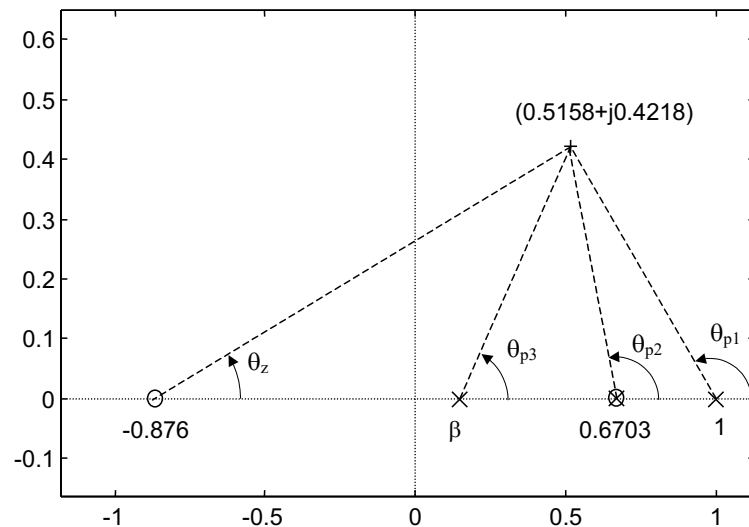
El controlador debe aportar los grados que faltan hasta cumplir el criterio del argumento, es decir, hasta llegar a 180° .

$$180^\circ - 231.26^\circ = -51.26^\circ$$

El controlador debe aportar $+51.26^\circ$.

Red elegida: $D(z) = K \frac{z + \alpha}{z + \beta}$

Cancelando el polo en $z=0.6703$ con el cero del controlador:



$$\sum \theta_{\text{ceros}} - \sum \theta_{\text{polos}} = 180^\circ$$

$$17.10 - 138.52 - \theta_{p3} = 180^\circ$$

$$\theta_{p3} = -301.42^\circ = 58.58^\circ$$

$$\tan 58.66^\circ = \frac{0.4218}{0.5158 - \beta}$$

$$\beta = 0.2589 \quad \alpha = 0.6703$$

$$D(z) = K \frac{z - 0.6703}{z - 0.2589}$$

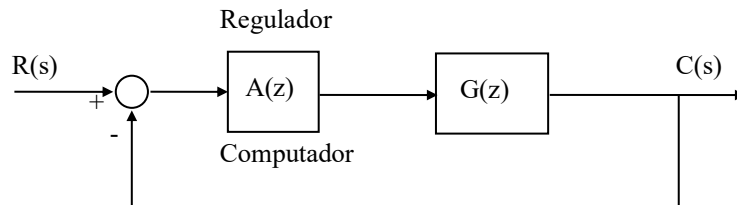
$$K \left| \frac{0.017(z + 0.876)}{(z - 0.2589)(z - 1)} \right|_{z=0.5158+j0.4218} = 1$$

$$K = 12.40$$

$$D(z) = 12.40 \frac{z - 0.6703}{z - 0.2589}$$

EJERCICIO 9.2

Calcular el regulador PD, discretizado por Tustin, para que el sistema de lazo cerrado representado en la figura presente un comportamiento similar a un sistema de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 30% y un tiempo de pico de 0.3 segundos ($T=0.1$ seg).



$$G(z) = \frac{0.121(z - 0.479)}{(z - 0.904)(z - 0.818)}$$

Ver ejercicio 7.4 para la construcción del lugar de las raíces.

Expresión del regulador PD continuo: $A(s) = k_p (1 + T_d s)$

Discretización por Tustin: $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

Como $T = 1$ segundo:

$$A(z) = k_p \left(1 + T_d \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right) = k \frac{z + \alpha}{z + 1}$$

Cálculo del punto de trabajo:

$$K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 3 \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow 60^\circ$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.3 \quad \sigma = -\frac{\alpha}{\pi} \ln 0.3 = 0.401 \quad e^{-\sigma} = 0.67$$

$$p_{1,2} = 0.335 \pm j0.58$$

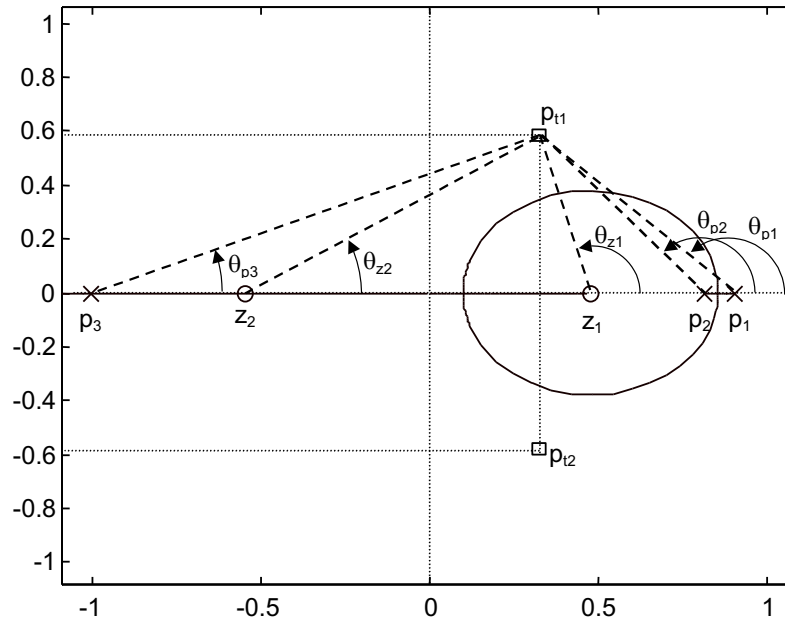
Aplicando el criterio del argumento:

$$\theta_{p_1} = 180 - \arctg \frac{0.58}{0.904 - 0.335} = 134.45^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 180 - \arctg \frac{0.58}{0.818 - 0.335} = 129.78^\circ$$

$$\theta_{z_1} = 180 - \arctg \frac{0.58}{0.479 - 0.335} = 103.94^\circ$$

$$\theta_{p_3} = \arctg \frac{0.58}{0.335 + 1} = 23.48^\circ$$



$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = -180^\circ$$

$$\theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = -180^\circ$$

$$\theta_{z_2} = 363.77^\circ = 3.77^\circ$$

$$\tan 3.77 = \frac{0.58}{x} \quad x=8.8 \quad a=8.46$$

$$k = \left| \frac{1}{G(z)} \right|_{z=0.335+j0.58} = \left| \frac{(z-0.904)(z-0.818)(z+1)}{0.121(z-0.479)(z+8.46)} \right|_{z=0.335+j0.58} = 1.4$$

$$A(z) = 1.4 \frac{(z+8.46)}{(z+1)}$$

EJERCICIO 9.3

Para el sistema continuo en lazo cerrado, con realimentación unitaria, cuya función de transferencia de lazo directo es $G(s) = \frac{1}{s^2}$ y su equivalente discreto $G(z) = \frac{1}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}$ (periodo de muestreo 1 segundo). Diseñar, empleando el lugar de las raíces, el controlador PD discreto (discretizado mediante el operador derivada) para que el sistema cumpla unas especificaciones de funcionamiento equivalentes a presentar un par de polos complejos conjugados en $0.8 \pm j0.2$.

Ver ejercicio 7.5 para el equivalente discreto y el lugar de las raíces.

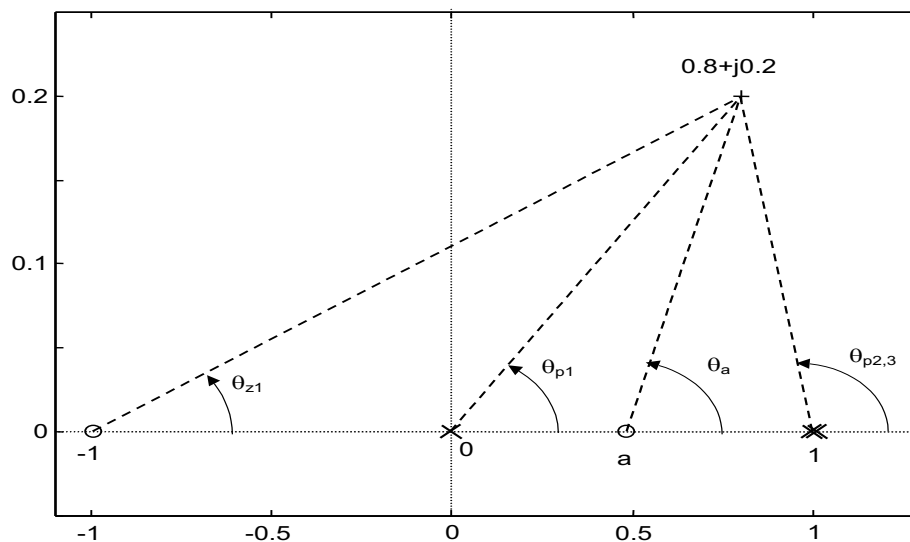
Expresión del regulador PD continuo: $A(s) = k_p (1 + T_d s)$

Discretización por operador derivada: $s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$

Como el periodo de muestreo es 1 segundo:

$$A(z) = k_p \left(1 + T_d \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} \right) = k_p \frac{z + T_d z - T_d}{z} = k_p \frac{z(T_d + 1) - T_d}{z} = k \frac{z + a}{z} \quad \begin{cases} k = k_p (T_d + 1) \\ a = \frac{T_d}{1 + T_d} \end{cases}$$

Se aplica el criterio del argumento para calcular la posición del cero a del regulador:



$$\theta_{z1} = \arctg \frac{0.2}{1.8} = 6.34^\circ$$

$$\theta_{p1} = \arctg \frac{0.2}{0.8} = 14.036^\circ$$

$$\theta_{p2} = \theta_{p3} = 180 - \arctg \frac{0.2}{0.2} = 135^\circ$$

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$\theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2} + \theta_{p_3}) = 180^\circ$$

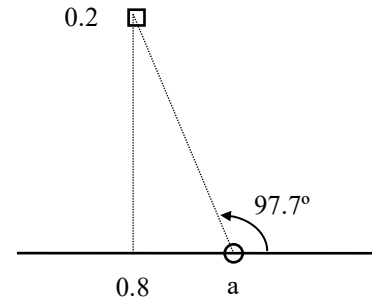
$$6.34 + \theta_{z_2} - (14.036 + 135 + 135) = 180^\circ$$

$$\theta_{z_2} = 457.7^\circ = 97.7^\circ$$

$$\operatorname{tg} 7.7 = \frac{x}{0.2}$$

$$x = 0.2 \operatorname{tg} 7.7 = 0.027$$

$$a = 0.8 + x = 0.827$$



$$k = \left| \frac{1}{G'(z)} \right|_{z=0.8+j0.2} = \left| \frac{z(z-1)^2}{0.5(z-0.827)(z+1)} \right|_{z=0.8+j0.2} = 0.36$$

$$A(z) = 0.36 \frac{(z + 0.827)}{z}$$

El regulador continuo:

$$T_d = \frac{a}{1-a} = \frac{0.827}{1-0.827} = 4.7$$

$$k_p = \frac{k}{T_d+1} = \frac{0.36}{4.78+1} = 0.06$$

$$A(s) = 0.06(1 + 4.78s)$$

EJERCICIO 9.4

Se desea controlar por computador un sistema de posicionamiento de sensores. Para ello se dispone de un sistema sensor de posición y transductor cuya función de transferencia es la unidad y se ha calculado el equivalente discreto de la función de transferencia de la dinámica del sistema, siendo la que se muestra a continuación:

$$G(z) = 0.15 \frac{(z + 0.25)(z - 0.743)(z + 3.442)}{(z - 1)^2(z^2 - 1.412z + 0.545)}$$

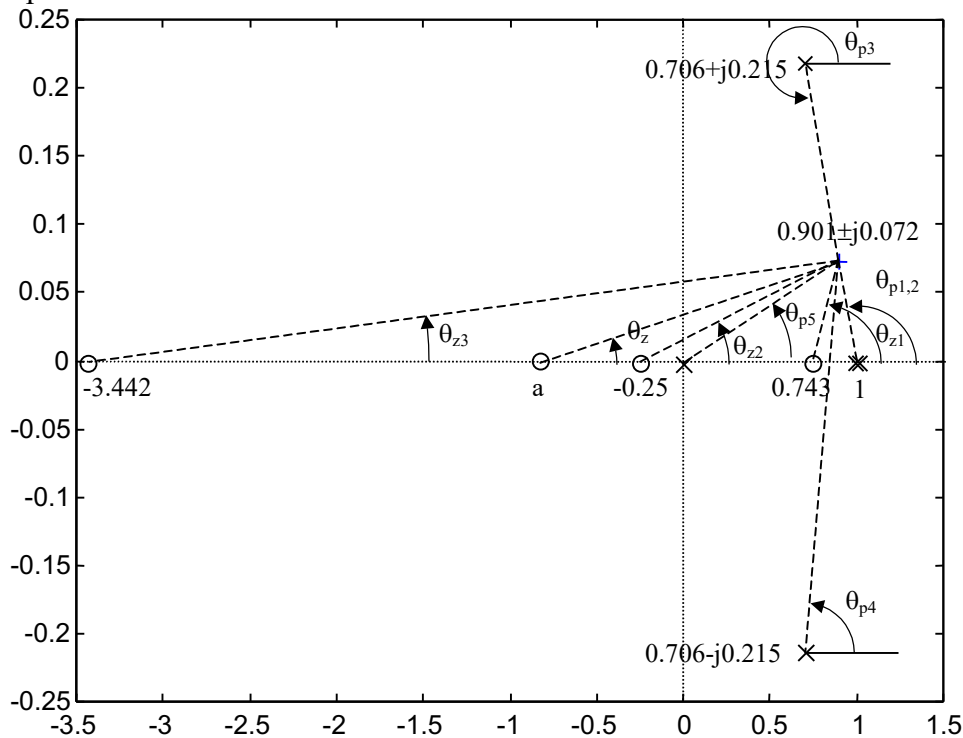
Diseñar mediante el lugar de las raíces, un controlador PID (discretizado por el operador derivada) para que el sistema se comporte en lazo cerrado como un sistema de segundo orden subamortiguado con los polos situados en $0.901 \pm j0.072$ y tal que el error en estado estacionario ante una entrada aceleración de amplitud 0.5 sea de 0.01. Indicar el tiempo de anticipación y la frecuencia de repetición obtenidos.

Expresión del regulador PD continuo: $A_I(s) = k_p (1 + T_d s)$

Discretización por operador derivada: $s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$

$$A_I(z) = k_p \left(1 + T_d \frac{1}{T} \frac{z-1}{z} \right) = k_p \frac{z + T_d z - T_d}{z} = k_p \frac{z(T_d + 1) - T_d}{z} = K_1 \frac{z + a}{z} \quad \begin{cases} K_1 = k_p(T_d + 1) \\ a = \frac{T_d}{1 + T_d} \end{cases}$$

Aplicando el criterio del argumento se calcula el valor de a para que el lugar de las raíces pase por el punto de funcionamiento deseado.



$$\theta_{p_1} = \theta_{p_2} = 180 - \arctg\left(\frac{0.072}{1 - 0.901}\right) = 143.97^\circ$$

$$\theta_{p_3} = \arctg\left(\frac{0.215 - 0.072}{0.901 - 0.706}\right) = -36.25^\circ$$

$$\theta_{p_4} = \arctg\left(\frac{0.215 + 0.072}{0.901 - 0.706}\right) = 55.8^\circ$$

$$\theta_{p_5} = \arctg\left(\frac{0.072}{0.901}\right) = 4.568^\circ$$

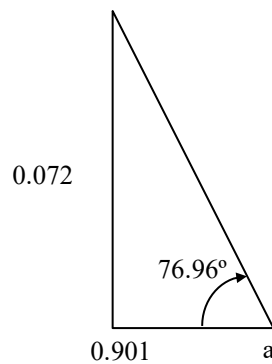
$$\theta_{z_1} = \arctg\left(\frac{0.072}{0.901 - 0.743}\right) = 24.49^\circ$$

$$\theta_{z_2} = \arctg\left(\frac{0.072}{0.901 + 0.25}\right) = 3.58^\circ$$

$$\theta_{z_3} = \arctg\left(\frac{0.072}{0.901 + 3.44}\right) = 0.95^\circ$$

$$\sum \theta_z + \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$\theta_z = 180 + 312.058 - 29.02 = 103.04$$



$$\operatorname{tg} 76.93^\circ = \frac{0.072}{x}$$

$$x = 0.0166$$

$$\alpha = 0.9176$$

$$k = \left| \frac{1}{G'(z)} \right|_{z=0.901+j0.072} = \left| \frac{z}{(z-0.884)G(z)} \right|_{z=0.901+j0.072} =$$

$$\left| \frac{(z-1)^2(z^2 - 1.412z + 0.545)z}{0.15(z+0.25)(z-0.743)(z+3.442)(z-0.8844)} \right|_{z=0.901+j0.072} \approx 0.1$$

$$\boxed{A_1(z) = 0.1 \frac{z-0.884}{z}}$$

Para el regulador PI continuo: $A_2(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s})$

Discretizando por el operador derivada hacia atrás: $s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$

$$A_2(z) = k_p(1 + \frac{1}{T_i \frac{z-1}{Tz}}) = k_p \left(\frac{Tz + T_i(z-1)}{T_i(z-1)} \right) = \frac{k_p}{T_i} \frac{(T + T_i)z - T_i}{z-1} = \frac{k_p(T + T_i)}{T_i} \frac{z - \frac{T_i}{(T + T_i)}}{z-1}$$

$$A_2(z) = K_2 \frac{z-b}{z-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} K_2 = \frac{k_p(T + T_i)}{T_i} \\ b = \frac{T_i}{(T + T_i)} \end{array} \right.$$

El criterio de diseño será poner el polo y el cero muy próximos entre sí para que apenas deformen el lugar de las raíces obtenido al aplicar el regulador PD.

$$A_2(z) = K_2 \frac{z-b}{z-1} \quad \text{con} \quad b = 0.98$$

De esta forma la ganancia K_2 será muy próxima a 1:

$$A_2(z) = \frac{z-0.98}{z-1}$$

El regulador total está formado por los dos reguladores anteriores $R(z) = A_1 \cdot A_2$

$$R(z) = 0.1 \frac{z-0.884}{z} \frac{z-0.98}{z-1}$$

EJERCICIO 9.5

Diseñar un regulador, discretizado por el operador derivada, por el lugar de las raíces para que el sistema continuo que viene dado por su función de transferencia $G(s)$ se comporte como un sistema de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 4.3%, un tiempo de pico de 2.4 segundos y un error ante entrada de velocidad de 0.4. Utilizar un periodo de muestreo de 0.1 segundos.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

Discretización:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{1}{s^2(s+1)(s+3)} \right] = \frac{z-1}{z} \sum_{\text{Polos}} \text{Residuos} \left[\frac{1}{s^2(s+1)(s+3)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

$$R_1 = \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2(s+1)(s+3)} \frac{z}{z - e^{0.1s}} \right]_{s=0} = \frac{-z(4z-4.3)}{9(z-1)^2}$$

$$R_2 = (s+1) \frac{1}{s^2(s+1)(s+3)} \frac{z}{z - e^{0.1s}} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{z}{z - 0.9048}$$

$$R_3 = (s+3) \frac{1}{s^2(s+1)(s+3)} \frac{z}{z - e^{0.1s}} \Big|_{s=-3} = \frac{-1}{18} \frac{z}{z - 0.7408}$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{-z(4z-4.3)}{9(z-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - 0.9048} + \frac{-1}{18} \frac{z}{z - 0.7408} \right]$$

$$G(z) = \frac{0.00015(z + 0.2415)(z + 3.3904)}{(z - 1)(z - 0.9048)(z - 0.7408)}$$

Para el regulador continuo $R_1(s) = k_p(1 + T_d s)$ aplicando el operador derivada hacia atrás $s = \frac{z-1}{Tz}$ tendremos $R_1(z) = k_p(1 + T_d \frac{z-1}{Tz}) = k_p \left(\frac{Tz + T_d(z-1)}{Tz} \right) = \frac{k_p}{T} \frac{(T + T_d)z - T_d}{z}$
 Como el periodo de muestreo es de 0.1 segundos quedará:

$$R_1(z) = K \frac{z-a}{z} \quad \begin{cases} K = 10k_p(0.1 + T_d) \\ a = \frac{T_d}{(0.1 + T_d)} \end{cases}$$

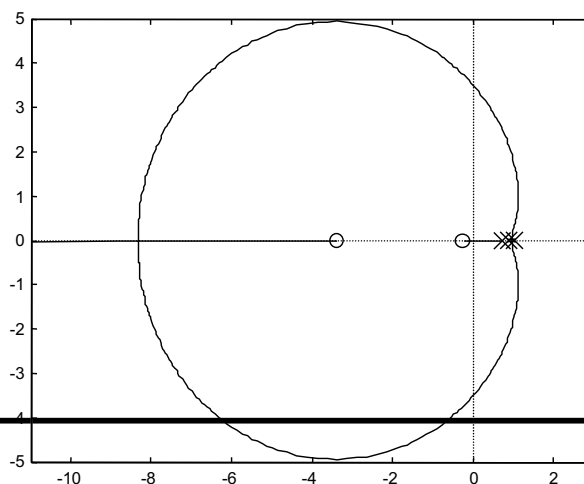
Modelo transitorio deseado:

$$t_p = K_p T = 2.4 \quad K_p = \frac{2.4}{0.1} = 24 \quad K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 24 \quad \alpha = \frac{\pi}{24} = 0.131 \text{ rad}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.043 \quad 3.147 = \frac{\pi\sigma}{\alpha} \quad \sigma = 0.131 \quad e^{-\sigma} = 0.877$$

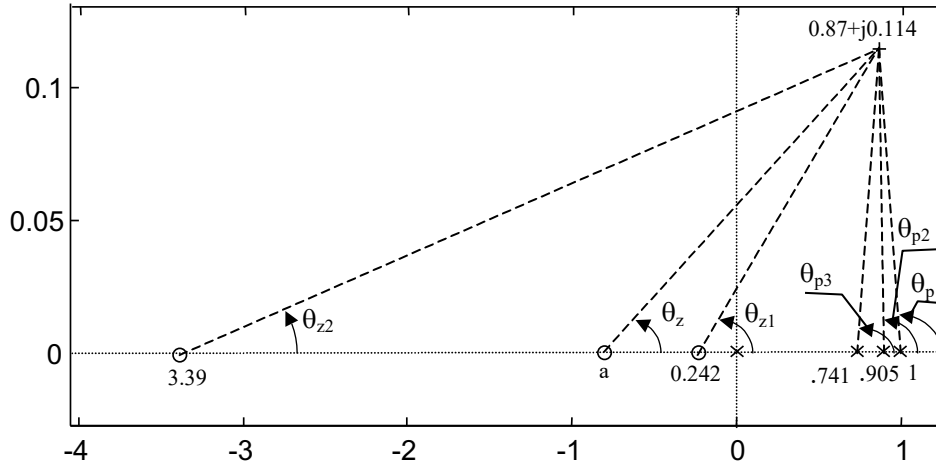
$$p_f = e^{-\sigma} \cos \alpha \pm j e^{-\sigma} \sin \alpha = 0.87 \pm j0.114$$

El lugar de las raíces inicial queda de la forma:



El punto de trabajo no pasa por el lugar de las raíces inicial, por tanto no es posible ajustar un regulador proporcional para que cumpla las especificaciones.

Diseño del regulador:



$$\theta_{p1} = 180^\circ - \arctg \frac{0.114}{1 - 0.87} = 138.75^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - \arctg \frac{0.114}{0.905 - 0.87} = 107.07^\circ$$

$$\theta_{p3} = \arctg \frac{0.114}{0.87 - 0.741} = 41.46^\circ$$

$$\theta_{p4} = \arctg \frac{0.114}{0.87} = 7.47^\circ$$

$$\theta_{z1} = \arctg \frac{0.114}{0.242 + 0.87} = 5.85^\circ$$

$$\theta_{z2} = \arctg \frac{0.114}{3.39 + 0.87} = 1.53^\circ$$

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$(5.85 + 1.53 + \theta_z) - (138.75 + 107.07 + 41.46 + 7.47) = 180$$

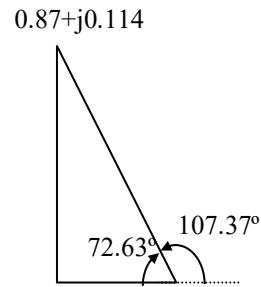
$$7.38 + \theta_z - 294.75 = 180$$

$$\theta_z = 467.37^\circ = 107.37^\circ$$

$$\operatorname{tg} 72.63 = \frac{0.114}{x}$$

$$x = 0.036$$

$$a = 0.87 + 0.036 = 0.906$$



Cálculo de la ganancia del regulador aplicando el criterio de módulo para que los polos de lazo cerrado pasen por el punto de trabajo deseado.

$$K_1 = \left| \frac{1}{G(z)R(z)} \right|_{z=0.87+j0.114}$$

$$K_1 = \left| \frac{(z-1)(z-0.905)(z-0.741)}{0.00015(z+0.242)(z+3.390)} \frac{z}{(z-0.906)} \right|_{z=0.87+j0.114} = 36.46$$

$$R_1(z) = 36.46 \frac{z-0.906}{z}$$

Error de velocidad del sistema con el regulador:

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)R(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.00015(z+0.242)(z+3.390)}{(z-1)(z-0.905)(z-0.741)} \frac{36.46(z-0.906)}{z} = 0.114$$

$$e_v = \frac{T}{K_v} = \frac{0.1}{0.114} = 0.88 > 0.4$$

El error está por encima de las especificaciones pedidas y por lo tanto es necesario introducir un regulador PI.

Para el regulador continuo $R(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s})$ aplicando el operador derivada hacia

$$\text{atrás } s = \frac{z-1}{T_z} \text{ tendremos } R(z) = k_p(1 + \frac{1}{T_i \frac{z-1}{T_z}}) = k_p \left(\frac{T_z + T_i(z-1)}{T_i(z-1)} \right) = \frac{k_p}{T_i} \frac{(T + T_i)z - T_i}{z-1}$$

Y como el periodo de muestreo es de 0.1 segundos quedará:

$$R(z) = K \frac{z-a}{z-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} K = \frac{k_p(0.1 + T_i)}{T_i} \\ a = \frac{T_i}{(0.1 + T_i)} \end{array} \right.$$

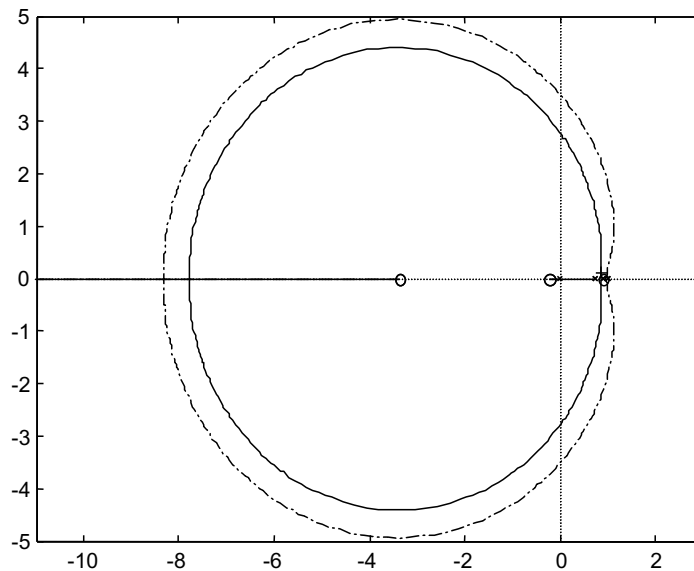
El criterio de diseño para que no modifique la forma del lugar de las raíces obtenida con el regulador PD será situar b muy próximo al $z=1$, por ejemplo $b=0.995$, siendo en este caso $K_I \cong 1$.

$$R_2(z) = \frac{z - 0.995}{z - 1}$$

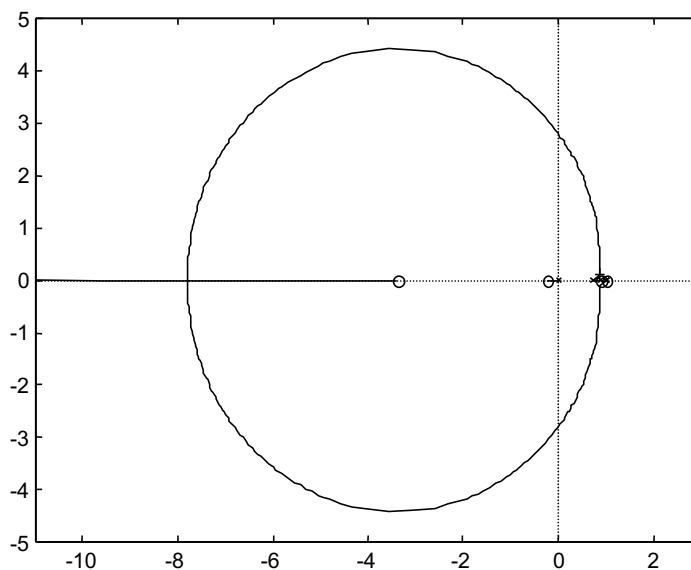
Luego el regulador completo será:

$$R(z) = 36.46 \frac{z - 0.906}{z} \frac{z - 0.995}{z - 1}$$

La figura muestra en línea continua el lugar de las raíces una vez añadido el regulador PD y en línea de punto y raya el lugar de las raíces inicial.



La siguiente figura muestra la forma del lugar de las raíces una vez que ha sido incluido el regulador PID completo.



Puede observarse que al introducir la parte correspondiente al regulador PI apenas se modifica la forma del lugar de las raíces, por lo que el sistema con regulador seguirá pasando por el punto de trabajo.

EJERCICIO 9.6

Se pretende diseñar el sistema de control de posición de una antena cuyo modelo discreto con mantenedor de orden cero es el siguiente:

$$G(z) = 0.05 \frac{z + 0.96}{(z - 1)(z - 0.9)}$$

Las características de funcionamiento deseado son equivalentes a un sistema de segundo orden con los polos en $0.4 \pm j0.46$. Diseñar un controlador PD discretizado por el operador de Tustin, para que el sistema cumpla las especificaciones deseadas.

El lugar de las raíces inicial puede verse en el ejercicio 7.7.

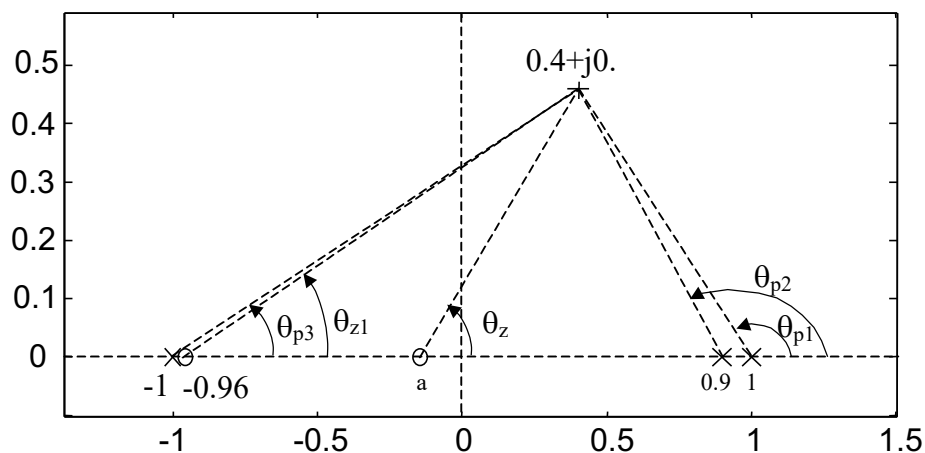
Para el regulador continuo $R_1(s) = k_p(1 + T_d s)$ aplicando el operador de Tustin $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ tendremos:

$$R(z) = k_p \left(1 + T_d \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right) = k_p \left(\frac{T(z+1) + 2T_d(z-1)}{T(z+1)} \right) = \frac{k_p}{T} \frac{(T + 2T_d)z + (T - 2T_d)}{z+1}$$

Luego la forma del regulador será:

$$R(z) = K \frac{z + a}{z + 1}$$

Para que los polos de lazo cerrado pasen por el punto de funcionamiento deseado se aplica el criterio del argumento al sistema completo añadiendo el regulador. El polo del regulador viene ya impuesto en $z = -1$ y queda por ajustar mediante el criterio del argumento el cero del regulador.



$$\theta_{p1} = 180 - \arctg \frac{0.46}{1 - 0.4} = 142.52^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180 - \arctg \frac{0.46}{0.9 - 0.4} = 137.39^\circ$$

$$\theta_{p3} = \arctg \frac{0.46}{1 + 0.4} = 18.19^\circ$$

$$\theta_{z1} = \arctg \frac{0.46}{0.96 + 0.4} = 18.69^\circ$$

$$\sum \text{ceros} - \sum \text{polos} = 180^\circ$$

$$18.69 + \theta_z - (142.52 + 137.39 + 18.19) = 180$$

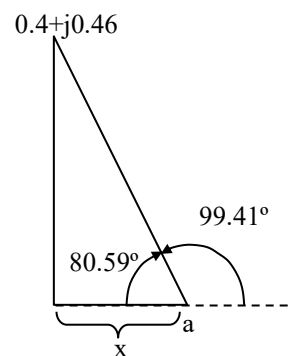
$$18.69 + \theta_z - 298.1 = 180$$

$$\theta_z = 459.41 = 99.41$$

$$\text{tg } 80.59 = \frac{0.46}{x}$$

$$x = 0.076$$

$$a = 0.4 + 0.076 = 0.476$$

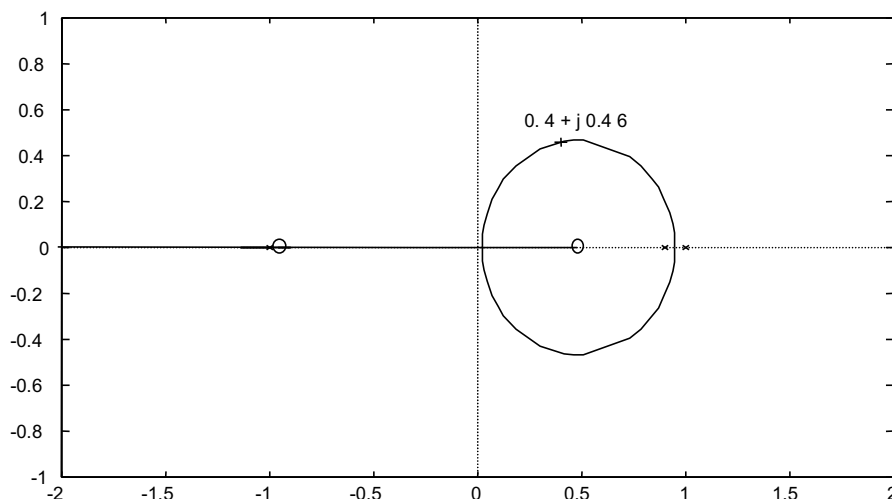


La ganancia a añadir al regulador se calcula aplicando el criterio del módulo:

$$K = \left| \frac{1}{G(z)R(z)} \right|_{z=0.4+j0.46} = \left| \frac{(z-1)(z-0.9)}{0.05(z+0.96)} \frac{(z+1)}{(z-0.476)} \right|_{z=0.4+j0.46} = 22.6$$

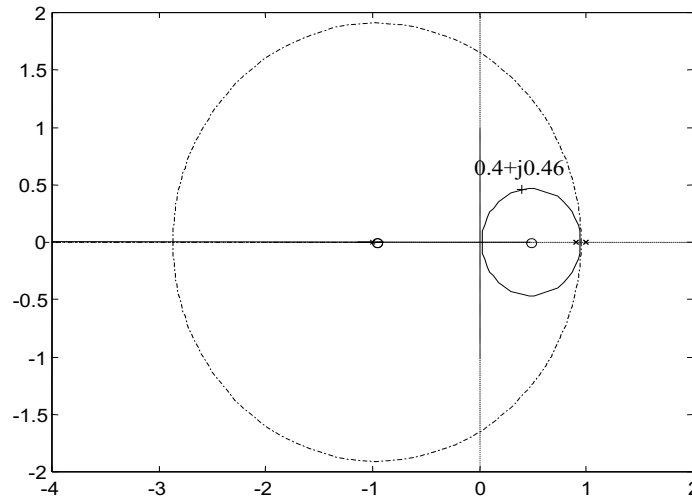
$$R(z) = 22.6 \frac{z - 0.476}{z + 1}$$

La figura representa el lugar de las raíces del sistema compensado. Puede verse cómo el lugar



de las raíces pasa por el punto de trabajo.

La siguiente figura muestra una comparativa entre la forma del lugar de las raíces inicial (trazo discontinuo) y el obtenido con el compensador (trazo continuo).



EJERCICIO 9.7

Para un sistema de control discreto con realimentación unitaria y una función de transferencia de lazo directo dada por la siguiente expresión:

$$G(z) = \frac{(z + 1.2)}{z(z - 0.5)(z + 0.3)}$$

Calcular un regulador PD discreto discretizado por el operador derivada hacia atrás para que el sistema en lazo cerrado funcione como un sistema de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 25%, un tiempo de pico de 4 muestras y con un error en estado estacionario ante una entrada escalón unidad igual al del sistema sin controlador.

Para el regulador continuo $R_1(s) = k_p(1 + T_d s)$ aplicando el operador derivada hacia

atrás $s = \frac{z-1}{Tz}$ tendremos $R_1(z) = k_p(1 + T_d \frac{z-1}{Tz}) = k_p \left(\frac{Tz + T_d(z-1)}{Tz} \right) = \frac{k_p}{T} \frac{(T + T_d)z - T_d}{z}$

Luego la forma del regulador discreto equivalente será:

$$R(z) = K \frac{z - a}{z}$$

Punto de funcionamiento deseado:

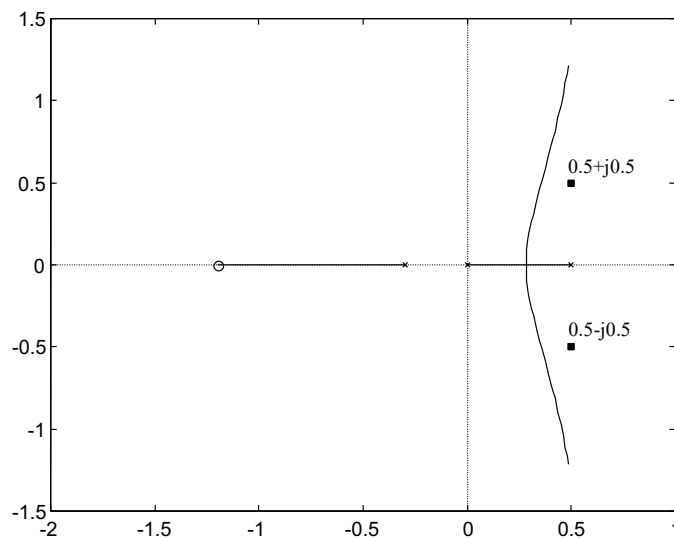
$$K_p = 4 \quad K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 4 \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$M_p = 25\% \quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.25 \quad e^{-\frac{\pi\sigma}{4}} = 0.25$$

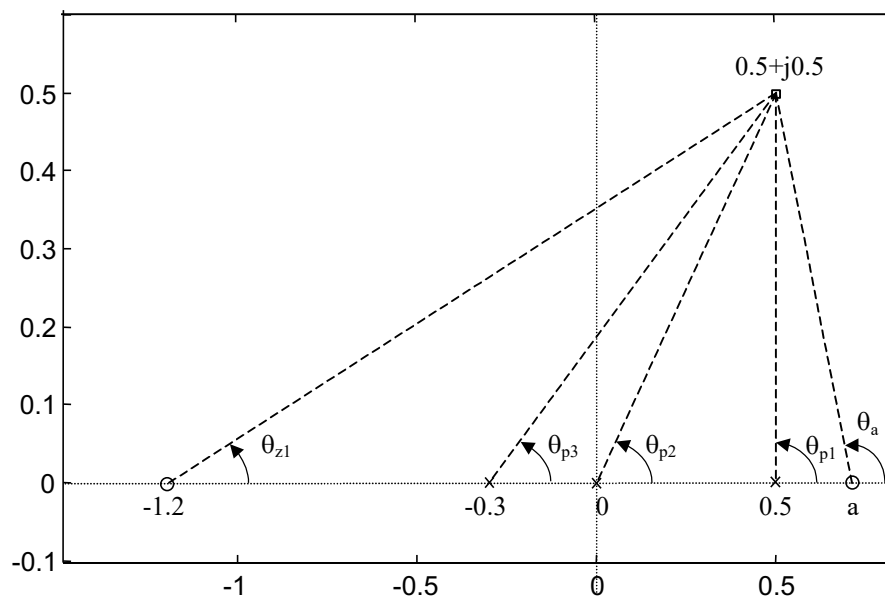
$$e^{-4\sigma} = 0.25 \quad \sigma = -\frac{\ln 0.25}{4} = 0.3466 \quad e^{-\sigma} = e^{-0.3466} = 0.7071$$

$$p_{1,2} = e^{-\sigma}(\cos \alpha \pm j \sin \alpha) = 0.5 \pm j0.5$$

La figura muestra el lugar de las raíces inicial del sistema sin regulador donde se observa que no pasa por el punto de trabajo deseado.



Aplicando el criterio del argumento para que el punto de trabajo deseado pase por el lugar de las raíces, se obtiene la posición del cero $z=a$:



$$\theta_{p1} = 90^\circ$$

$$\theta_{p2} = \theta_{p3} = \arctg \frac{0.5}{0.5} = 45^\circ$$

$$\theta_{p4} = \arctg \frac{0.5}{0.5 + 0.3} = 32^\circ$$

$$\theta_{z1} = \arctg \frac{0.5}{0.5 + 1.2} = 16.39^\circ$$

$$\Sigma_{\text{ceros}} - \Sigma_{\text{polos}} = 180^\circ$$

$$16.39 + \theta_a - (90 + 45 + 45 + 32) = 180$$

$$\theta_a = 375.61 = 15.61^\circ$$

$$\text{tg} 15.61 = \frac{0.5}{a + 0.5}$$

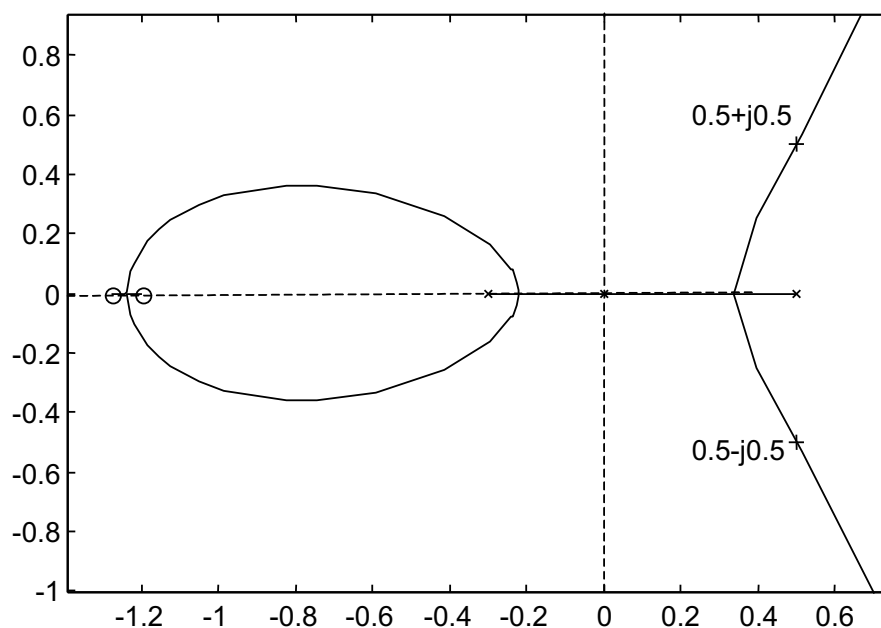
$$a = \frac{0.5}{\text{tg} 15.61} - 0.5 = 1.28$$

Aplicando el criterio del módulo se calcula el valor de la ganancia del regulador:

$$K = \left| \frac{1}{G(z)R(z)} \right|_{z=0.5+j0.5} = \left| \frac{z(z-0.5)(z+0.3)}{(z+1.2)} \frac{z}{(z+1.28)} \right|_{z=0.5+j0.5} = 0.072$$

$$R(z) = 0.072 \frac{z+1.28}{z}$$

La figura muestra la forma del lugar de las raíces del sistema compensado donde puede verse que pasa por el punto de trabajo indicado.



EJERCICIO 9.8

Un sistema de lazo cerrado que utiliza un mantenedor de orden cero está formado por:

$$Gp(s) = \frac{K}{s + \frac{1}{5}} \quad \text{y} \quad H(s) = e^{-2s},$$

Diseñar un regulador digital $D(z)$, equivalente a un PI continuo discretizado por el operador derivada hacia atrás, para que introducido en la cadena directa del sistema, la respuesta ante un escalón unitario sea similar a la de un sistema de segundo orden con un máximo sobreimpulso del 5.25% y un tiempo de establecimiento de 9 segundos. Periodo de muestreo 2 segundos.

Ver ejercicio 7.8 para la discretización y lugar de las raíces inicial.

$$GH(z) = \frac{0.9065}{z^2(z - 0.8187)}$$

Para el regulador continuo $R(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s})$ aplicando el operador derivada hacia

atrás $s = \frac{z-1}{Tz}$ tendremos $R(z) = k_p(1 + \frac{1}{T_i \frac{z-1}{Tz}}) = k_p \left(\frac{Tz + T_i(z-1)}{T_i(z-1)} \right) = \frac{k_p}{T_i} \frac{(T + T_i)z - T_i}{z-1}$

Y como el periodo de muestreo es de 2 segundos quedará:

$$R(z) = K \frac{z - \alpha}{z - 1} \quad \begin{cases} K = \frac{k_p(1 + T_i)}{T_i} \\ \alpha = \frac{T_i}{(1 + T_i)} \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de régimen transitorio se obtiene el punto de trabajo:

$$t_s = K_s \cdot T = 9 \quad K_s = \frac{9}{1} = 9 \quad K_s = \frac{\pi}{\sigma} = 9 \quad \sigma = \frac{\pi}{9}$$

$$M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = e^{-\frac{\pi^2}{9\alpha}} = 0.0525 \quad -\frac{\pi^2}{9\alpha} = \ln 0.0525$$

$$\alpha = -\frac{\pi^2}{9 \ln 0.0525} = 0.3721 \text{ rad/s}$$

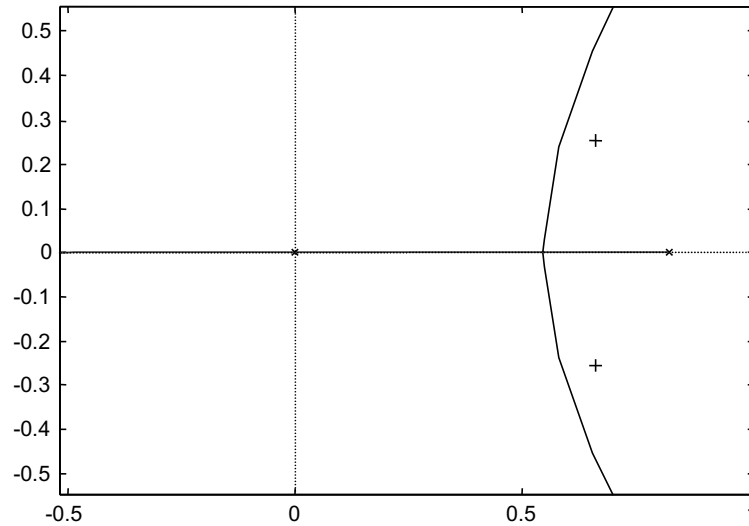
$$e^{-\sigma} = e^{-\frac{\pi}{9}} = 0.7053$$

El punto de trabajo será:

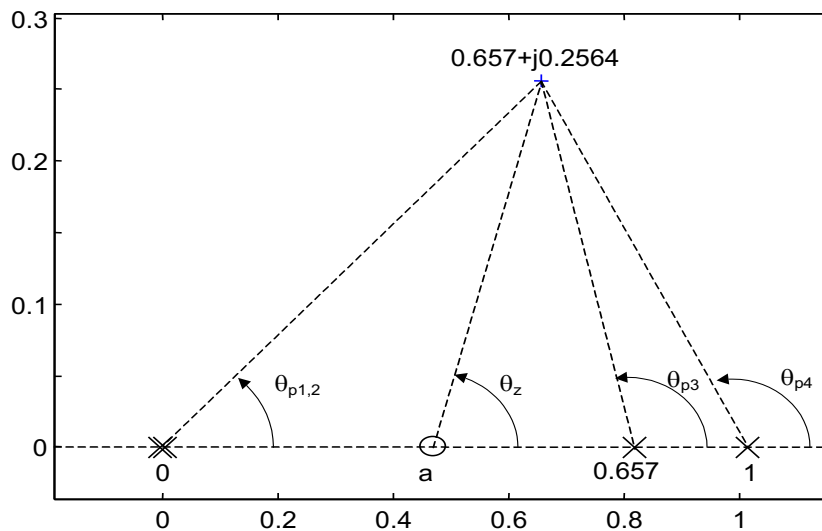
$$p_{1,2} = e^{-\sigma} \cos \alpha \pm j e^{-\sigma} \sin \alpha = 0.7053 \cos 0.372 \pm j 0.7053 \sin 0.372$$

$$p_{1,2} = 0.657 \pm j 0.2564$$

El lugar de las raíces del sistema inicial con el punto de trabajo deseado se muestra en la figura. Puede verse que dicho lugar de las raíces no pasa por los puntos indicados.



Aplicando el criterio del argumento al sistema con regulador se calcula la posición del cero del regulador.



$$\theta_{p1} = \theta_{p2} = \arctg \frac{0.2564}{0.657} = 21.3187^\circ$$

$$\theta_{p3} = 180 - \arctg \frac{0.2564}{0.8187 - 0.657} = 122.2378^\circ$$

$$\theta_{p4} = \arctg \frac{0.2564}{1-0.657} = 143.2211^\circ$$

$$\sum \theta_z - \sum \theta_p = 180^\circ$$

$$\theta_z - (\theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} + \theta_{p4}) = 180^\circ$$

$$\theta_z - (2 \cdot 21.3187 + 122.2378 + 143.2211) = 180$$

$$\theta_z = 488.0963^\circ = 128.0963^\circ$$

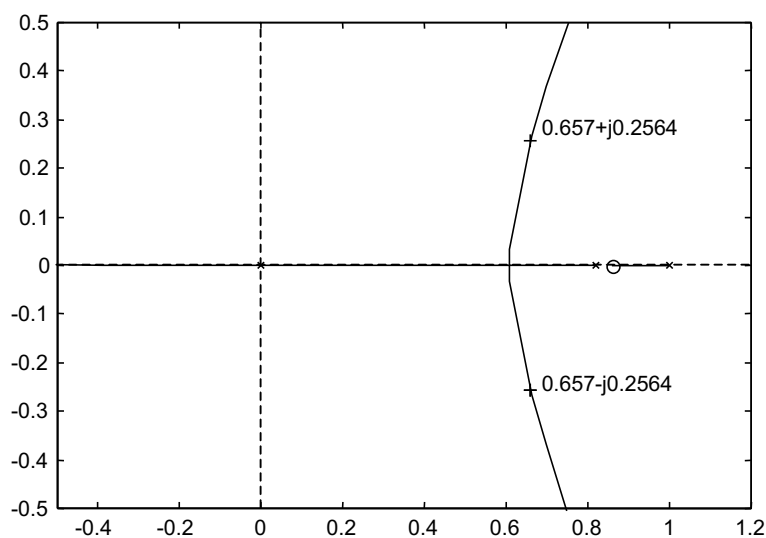
$$\operatorname{tg}(180 - 128.0963)_z = \frac{0.2564}{a - 0.657} = 1.2755 \quad a = 0.8580$$

Aplicando ahora el criterio del módulo se calcula la ganancia necesaria para que los polos del sistema compensado pasen por el punto de trabajo.

$$k = \left| \frac{1}{G'(z)} \right|_{z=0.657+j0.2564} = \left| \frac{z^2(z-0.8187)(z-1)}{0.9065(z-0.8580)} \right|_{z=0.657+j0.2564} = 0.2186$$

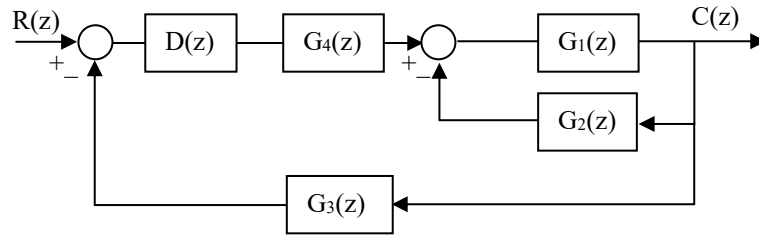
$$R(z) = 0.2186 \frac{z-0.8580}{z-1}$$

La forma del lugar de las raíces una vez aplicado el regulador se muestra en la figura. Puede verse que pasa por el punto de trabajo deseado.



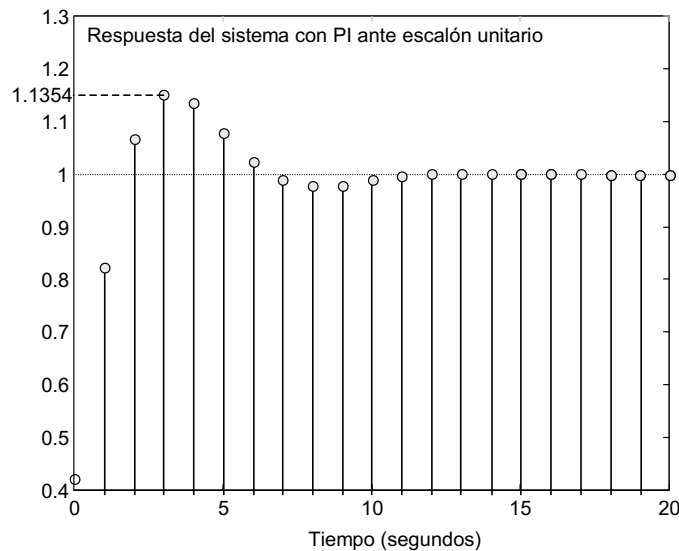
EJERCICIO 9.9

Dado el siguiente sistema discreto:



$$G_1(z) = \frac{z}{z - 1/2} \quad G_2(z) = \frac{1}{4} \quad G_3(z) = \frac{1}{z} \quad G_4(z) = \frac{z}{z + 1/2}$$

Diseñar un regulador discreto $D(z)$, equivalente a un PI continuo discretizado por el operador derivada hacia atrás, para que utilizando un periodo de muestreo de 1 segundo se obtenga una respuesta como la que se muestra en la figura.



Resolviendo el lazo interno:

$$G_5(z) = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z) \cdot G_2(z)} = \frac{\frac{z}{z - 0.5}}{1 + \frac{z}{z - 0.5} \cdot 0.25} = \frac{z}{z - 0.5 + 0.25z} = \frac{z}{1.25z - 0.5}$$

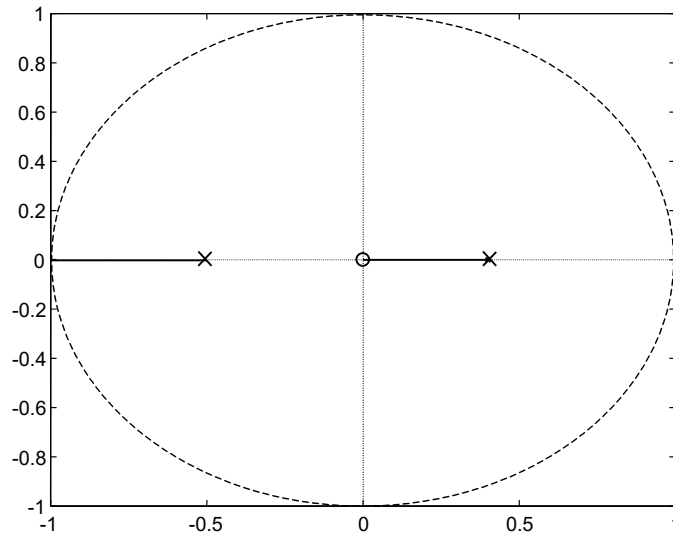
$$G_5(z) = 0.8 \frac{z}{z - 0.4}$$

La función de transferencia de lazo abierto del sistema será:

$$F(z) = G_4(z) \cdot G_5(z) \cdot G_3(z)$$

$$F(z) = \frac{z}{z+0.5} \cdot 0.8 \frac{z}{z-0.4} \cdot \frac{1}{z} = \frac{0.8z}{(z+0.5)(z-0.4)}$$

La forma del lugar de las raíces del sistema será:



De la gráfica de la respuesta del sistema con PI ante entrada escalón unitario pueden leerse los siguientes datos:

$$M_p = \frac{1.1354 - 1}{1} = 0.1354 = 13.54\%$$

$$K_p = 3$$

Con estos datos se obtiene la posición del punto de funcionamiento.

$$K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 3 \qquad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$M = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} = 0.1354 \qquad e^{-\frac{3\pi\sigma}{\pi}} = 0.1354 \qquad e^{-\sigma} = \sqrt[3]{0.1354} = 0.5135$$

El punto de funcionamiento es:

$$p_f = e^{-\sigma}(\cos \alpha + j \sen \alpha) = 0.5135(\cos \frac{\pi}{3} + j \sen \frac{\pi}{3})$$

$$\boxed{p_f = 0.256 + j0.4447}$$

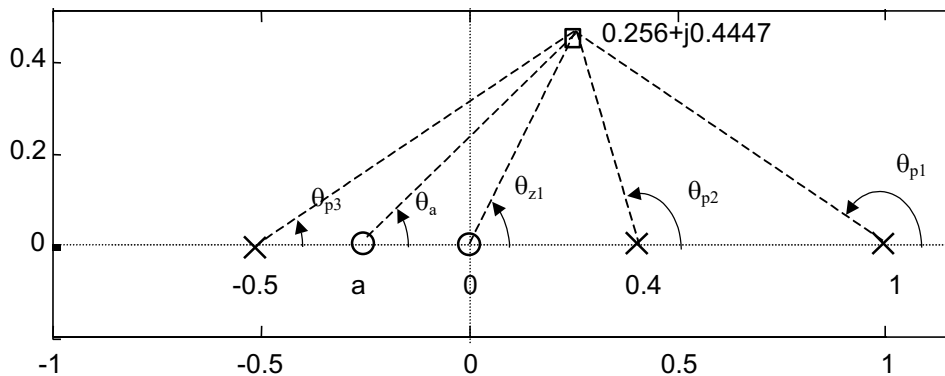
Para el regulador continuo $R(s) = k_p(1 + \frac{1}{T_i s})$ aplicando el operador derivada hacia

$$\text{atrás } s = \frac{z-1}{Tz} \text{ tendremos } R(z) = k_p(1 + \frac{1}{T_i \frac{z-1}{Tz}}) = k_p \left(\frac{Tz + T_i(z-1)}{T_i(z-1)} \right) = \frac{k_p}{T_i} \frac{(T + T_i)z - T_i}{z-1}$$

Luego la forma del regulador será:

$$R(z) = K \frac{z-a}{z-1}$$

Aplicando el criterio del argumento al sistema con el regulador $R(z)$:



$$\theta_{p1} = 180^\circ - \arctg \frac{0.4447}{1 - 0.2567} = 149.1088^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ - \arctg \frac{0.4447}{0.4 - 0.2567} = 107.8610^\circ$$

$$\theta_{p3} = \arctg \frac{0.4447}{0.5 + 0.2567} = 30.4420^\circ$$

$$\theta_{z1} = \alpha = 60^\circ$$

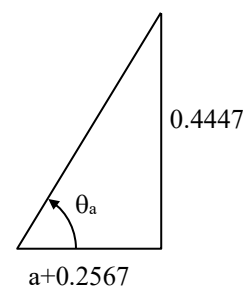
$$\sum \text{ceros} - \sum \text{polos} = 180^\circ$$

$$60 + \theta_a - (149.1088 + 107.8610 + 30.4420) = 180$$

$$\theta_a = 407.4118 = 47.4118^\circ$$

$$\text{tg } 47.4118 = \frac{0.4447}{a + 0.2567}$$

$$a = 0.1521$$



Luego el regulador será de la forma:

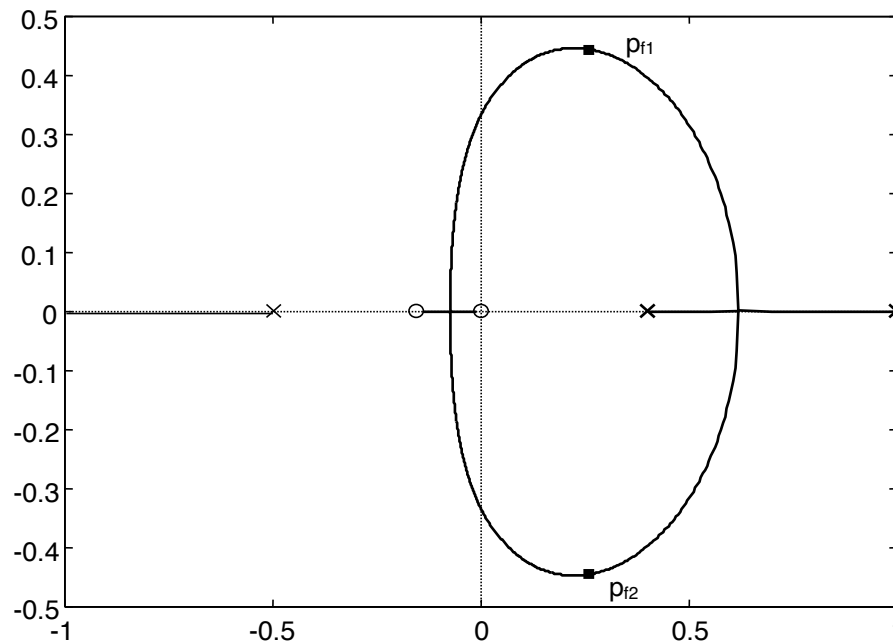
$$R(z) = K \frac{z + 0.1521}{z - 1}$$

Aplicando el criterio del módulo se calcula el valor de la ganancia del regulador:

$$K = \left| \frac{1}{G(z)R(z)} \right|_{z=0.2567+j0.4447} = \left| \frac{(z+0.5)(z-0.4)}{0.8z} \frac{z-1}{z+0.1521} \right|_{z=0.2567+j0.4447} = 1.4316$$

$$R(z) = 1.4316 \frac{z + 0.1521}{z - 1}$$

Puede verse en la figura que el lugar del sistema compensado pasa por el punto de funcionamiento:



EJERCICIO 9.10

Para un sistema de lazo cerrado con realimentación unitaria y mantenedor de orden cero, donde la función de transferencia del sistema continuo a controlar es:

$$G(s) = \frac{e^{-0.2s}}{s^2 + 2s + 2}$$

Diseñar mediante el lugar de las raíces un regulador PD discretizado mediante el operador integral hacia atrás, para que el sistema tenga un máximo sobreimpulso del 20% y un tiempo de pico de 1 segundo.

Periodo de muestreo de 0.1 segundos.

El equivalente discreto de la planta es:

$$G(z) = \frac{0.005(z + 0.8)}{z^2(z^2 - 1.8z + 0.818)}$$

Los cálculos del equivalente discreto y del lugar de las raíces del sistema pueden verse en el ejercicio 7.6.

Para el regulador continuo $R_1(s) = k_p(1 + T_d s)$ aplicando el operador derivada hacia atrás $s = \frac{z-1}{Tz}$ tendremos $R_1(z) = k_p(1 + T_d \frac{z-1}{Tz}) = k_p \left(\frac{Tz + T_d(z-1)}{Tz} \right) = \frac{k_p}{T} \frac{(T + T_d)z - T_d}{z}$

Como el periodo de muestreo es de 0.1 segundos quedará:

$$R_1(z) = K \frac{z-a}{z} \quad \begin{cases} K = 10k_p(0.1 + T_d) \\ a = \frac{T_d}{(0.1 + T_d)} \end{cases}$$

Aplicando las condiciones de régimen transitorio

$$t_p = 10\text{seg} \quad t_p = K_p \cdot T \quad K_p = \frac{t_p}{T} = \frac{1}{0.1} = 10 \quad K_p = \frac{\pi}{\alpha} = 10$$

$$\alpha = \frac{\pi}{10}$$

$$M_p = 20\% \quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\alpha}} \quad 0.2 = e^{-\frac{\pi\sigma}{\pi/10}} \quad 0.2 = e^{-10\sigma}$$

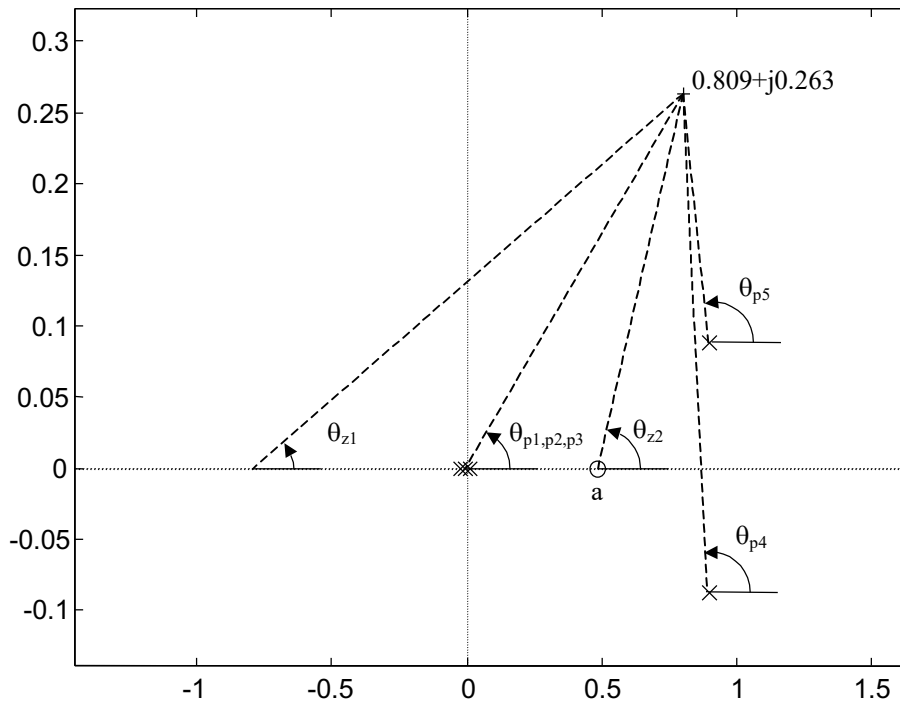
$$e^{-\sigma} = \sqrt[10]{0.2} = 0.851$$

El punto de funcionamiento es:

$$p_f = e^{-\sigma}(\cos \alpha + j \operatorname{sen} \alpha) = 0.851(\cos \frac{\pi}{10} + j \operatorname{sen} \frac{\pi}{10})$$

$$p_f = 0.809 + j0.263$$

Aplicando el criterio del argumento al sistema con el regulador R(z):



$$\theta_{p1, p2, p3} = \operatorname{arctg} \frac{0.263}{0.809} = 18.009^\circ$$

$$\theta_{p4} = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{0.263 + 0.089}{0.9 - 0.809} = 104.495^\circ$$

$$\theta_{p5} = 180^\circ - \operatorname{arctg} \frac{0.263 - 0.089}{0.9 - 0.809} = 117.609^\circ$$

$$\theta_{z1} = \operatorname{arctg} \frac{0.263}{0.8 + 0.809} = 9.283^\circ$$

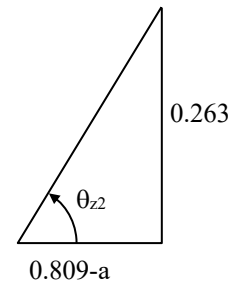
$$\sum \text{ceros} - \sum \text{polos} = 180^\circ$$

$$(9.283^\circ + \theta_{z2}) - (3 \cdot 18.009^\circ + 104.495^\circ + 117.609^\circ) = 180^\circ$$

$$\theta_{z2} = 86.848^\circ$$

$$\operatorname{tg} 86.848^{\circ} = \frac{0.263}{0.809 - a}$$

$$a = 0.795$$



$$R(z) = K \frac{z - 0.795}{z}$$

Aplicando el criterio del módulo se obtiene el valor de la ganancia K para el punto de trabajo:

$$K = \left| \frac{z^3(z^2 - 1.8z + 0.818)}{0.005(z + 0.8)(z - 0.795)} \right|_{z=0.809+j0.263} = 20.453$$

Luego finalmente el regulador queda:

$$R(z) = 20.453 \frac{z - 0.795}{z}$$

La figura muestra cómo el lugar de las raíces del sistema con regulador pasa por el punto de funcionamiento pedido:

