Cálculo Integral

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

Examen final, 12 de junio de 2017

Teoría, 40 % de la nota del examen
Todas las cuestiones valen lo mismo

Responder $\boxed{\text{DE FORMA RAZONADA}}$ a las siguientes cuestiones

$\mathbf{C_1}$) Sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$. Para que $\boldsymbol{F}$ sea el gradiente de alguna función escalar sobre $\mathbb{R}^3$, la condición

$$\forall i, j = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

¿es necesaria?; ¿es suficiente?

$\mathbf{C_2}$) Sean C^+ una curva simple y Σ^+ una superficie, ambas contenidas en $\mathbb{R}^3$ y orientadas, y sea $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathscr{C}^1$.

1. Dar una fórmula que sirva para convertir $\int_{C^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ en la integral de un campo escalar sobre C, $\int_C \dots ds$.
2. Dar una fórmula que sirva para convertir $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ en la integral de un campo escalar sobre Σ, $\iint_\Sigma \dots d\sigma$.

$\mathbf{C_3}$) De la definición de orientación de una superficie (definición 3.26):

> "…la superficie Σ está orientada por su parametrización $\boldsymbol{\Phi} : D = D_1 \cup \cdots \cup D_m \longrightarrow \Sigma$ cuando se cumplan las dos condiciones siguientes:
>
> 1. Existe una normal unitaria continua definida sobre todos los puntos regulares de Σ y que sobre la imagen de $\operatorname{Int} D_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Int} D_m$ coincide con el vector normal unitario $\frac{\boldsymbol{n_\Phi}}{\|\boldsymbol{n_\Phi}\|}$.
> 2. …"

Poner un ejemplo de Σ y $\boldsymbol{\Phi}$ para los que haya puntos regulares de Σ que NO pertenezcan a la imagen de $\operatorname{Int} D_1 \cup \cdots \cup \operatorname{Int} D_m$. [Sugerencia: Hay ejemplos con $m = 1$ y D igual a un rectángulo.]

$\mathbf{C_4}$) Considérese un cubo W en el que está inscrita una superficie esférica Σ y sea f una función real definida sobre W. De f sabemos además que (a) está acotada; (b) en los puntos de Σ no es continua; (c) en los puntos de $W \backslash \Sigma$ es continua.

¿Podemos asegurar que f es integrable, o que no es integrable (en el sentido de Riemann), o ninguna de las dos cosas?

$\mathbf{C_5}$) Rellenar los límites de integración que faltan en la siguiente igualdad:

$$\int_0^3 \int_x^{6-x} \int_0^{2x} dz\, dy\, dx = \int_\square^\square \int_\square^\square \int_x^{6-x} dy\, dx\, dz.$$

Cálculo Integral

(1º de los Grados en Matemáticas y en Física, Universidad de Cantabria)

Examen final, 12 de junio de 2017

Problemas, 60 % de la nota del examen
Todos los problemas valen lo mismo

Entregar cada problema por separado

P_1) Sea D la región de $\mathbb{R}^2$ encerrada por la rectas

$$y - x = 0, \quad y - x = 2, \quad y + x = 0, \quad y + x = 1.$$

Calcular $\iint_D xe^{x-y}\, dA$.

P_2) Sea W la región de $\mathbb{R}^3$ definida por las desigualdades

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 18 - x^2 - y^2, \quad y \geq 0,\, z \geq 0.$$

Calcular $\iiint_W (xy + z)\, dV$.

P_3) Consideremos la superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = (u^2 + v^2, 2uv, u^3), \quad 0 \leq u \leq 2,\, 1 \leq v \leq 3.$$

Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $(5, 4, 1)$.

P_4) Sea Σ la semiesfera definida por

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4, \quad z \geq 1,$$

con la orientación de las normales hacia arriba. Calcular $\iint_{\Sigma^+} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, siendo $\boldsymbol{F}(x, y, z) = yz^2\boldsymbol{i} - 3xy\boldsymbol{j} + (y^4 z + x^3)\boldsymbol{k}$.