Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

6 de septiembre de 2010 (Teoría)

- Todas las cuestiones puntúan por igual.
- El 40 % de la nota del examen final se obtiene por las cuestiones y el 60 % restante se obtiene por los problemas.

Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

C_1 De una función acotada $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ se sabe que es discontinua en todos los puntos de las diagonales del cuadrado, así como que es continua en los demás puntos del cuadrado. A partir de estos datos, ¿podemos asegurar que es integrable?

C_2 ¿Son ciertas las siguientes propiedades para funciones acotadas f, g, definidas ambas sobre el cubo unidad $B = [0, 1]^3$?:

1. Si c es un número real no nulo y f es integrable, entonces $\frac{f}{c}$ también es integrable.
2. Si $f + g$ es integrable, entonces f y g son integrables.
3. Si f es integrable, entonces también lo es $|f|$ y además $\iint_B |f| \leq \left|\iint_B f\right|$.

C_3 Considérese el cono $0 \leq z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5$. ¿Puede ponerse como imagen de alguna parametrización $\mathbf{\Phi}$ que sea de clase $\mathcal{C}^1$? (Si la respuesta es que sí, dar una parametrización de ese tipo. Y si es que no, decir por qué.)

C_4 Decir si es cierto lo siguiente: suponiendo que $D \subset \mathbb{R}^2$ sea un recinto sobre el que es válida la Fórmula de Riemann-Green, el área de D puede calcularse mediante la fórmula

$$A(D) = \int_{\partial D^+} -y \, dx.$$

C_5 La integral de un campo vectorial sobre una superficie, ¿depende de la orientación de la superficie?

Misma pregunta para el caso de integral sobre una curva, en lugar de una superficie.

Examen final de Cálculo Integral
1º de los Grados en Matemáticas y Física

6 de septiembre de 2010 (Problemas)

- Todos los problemas puntúan por igual.
- El 60 % de la nota del examen final se obtiene por los problemas y el 40 % restante se obtiene por las cuestiones.

$\mathbf{P_1}$ Hallar el volumen acotado por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados (donde a, b y c son números positivos).

$\mathbf{P_2}$ Calcular la integral $\iint_\Sigma x^2 \, dS$, donde Σ es la parte del plano $x = z$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq 3$.

$\mathbf{P_3}$ Considérese el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + z\cos(yz)\mathbf{j} + [2xz + y\cos(yz) + 1]\,\mathbf{k}.$$

Calcular $\int_\mathbf{c} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}$ es la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

$\mathbf{P_4}$ Calcular $\iint_{\Sigma^+} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = (-y, -z, -x)$ y Σ^+ es la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$, con la orientación de las normales hacia abajo.