

Cuestiones de Análisis Matemático

Algunas de las cuestiones que aparecen en esta relación están pensadas para ser introducidas en un plataforma interactiva de aprendizaje de modo que los parámetros a, b que aparecen en el enunciado son convertidos en números enteros, adecuados al enunciado y entre -9 y 9 , de modo que la respuesta del alumno es comprobada a partir de la fórmula de solución que aparece encuadrada al final del enunciado.

34. La desigualdad de números reales $|x - y| \geq |x| - |y|$

- a) Es falsa.
- b) Es cierta.
- c) Sólo es cierta si $y \leq 0$.

35. El número $1.101001000100001\dots$ es:

- a) Irracional.
- b) Racional.

36. La suma de dos números racionales es:

- a) Irracional.
- b) Racional.
- c) Unas veces racional y otras irracional.

37. El número $1 - \sqrt{2}$ es:

- a) Racional.
- b) Irracional.
- c) Entero.

38. La suma de dos números irracionales es:

- a) Irracional.
- b) Racional.
- c) Unas veces racional y otras irracional.

39. Marcar las afirmaciones que son ciertas para el número real

$$r = \sqrt{7 + \sqrt{48}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}}$$

- a) r es irracional
 b) r es positivo
 c) r es natural

40. Marcar las afirmaciones que son ciertas para el número real

$$r = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{8}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{8}}{2}}$$

- a) r es irracional
 b) r es positivo
 c) r es natural

41. Dados los números complejos

$$z_1 = 1 + i; \quad z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad z_3 = \frac{\bar{z}_1 \cdot z_2}{2}$$

Se pide rellenar, con dos cifras decimales, los siguientes recuadros teniendo en cuenta que en el recuadro (41a) debe aparecer la parte real de z_3 , en (41b) debe aparecer la parte imaginaria de z_3 , en (41c) debe aparecer el módulo de z_3 y en (41d) el argumento, en grados, de z_3 .

- a)
 b)
 c)
 d)

42. Dados los números complejos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dar en el siguiente recuadro, en grados sexagesimales y con dos dígitos decimales, la expresión del argumento del número complejo $\bar{z}_1 \cdot z_2$

43. La ecuación $e^z + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$:

- a) No tiene ninguna solución.
 b) No tiene ninguna solución real.
 c) Sólo se verifica para los número complejos de módulo 1.

44. La determinación principal de $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3}$ es

- a) -1 .
 b) $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 c) $1_{-\pi/6}$.

45. ¿Es equilátero el triángulo de vértices $0, z, z \cdot w$, para $w = (\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2})$ y z un número complejo distinto de cero?

- a) Sí.
 b) No.
 c) Depende del valor de z .

46. La función de Euler, $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = e^{it}$, verifica:

- a) $|z(t_1 + t_2)| = |z(t_1)| + |z(t_2)|$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
 b) $\text{Arg } z(t) = t$.
 c) $\frac{d^2 z}{dt^2} = z$.

47. Sea z un número complejo distinto de cero y tal que $0, z, z^2$ representan tres puntos alineados del plano complejo, entonces:

- a) z es un número real.
 b) z^2 es un número imaginario.
 c) z tiene igual parte real que imaginaria.

48. Sea z un número complejo distinto de cero y tal que z, z^2 representan dos vectores perpendiculares del plano complejo, entonces:

- a) z es un número real.
 b) z^2 es un número imaginario distinto de cero.
 c) z tiene igual parte real que imaginaria.

49. Sea z un número complejo distinto de cero que verifica $\text{Im } z = \text{Im } z^2 \neq 0$ entonces:

- a) $z + \bar{z} = 1$.
 b) El módulo de z es $1/4$.
 c) $\text{Arg } z = \pi/4$.

50. Denotamos por $\text{sen } x^\circ$, $\text{cos } x^\circ$ las funciones seno, coseno cuando la x viene expresada en grados sexagesimales. Se pide marcar todas las contestaciones correctas:

- a) $(\text{sen } x^\circ)' = \text{cos } x^\circ$.
 b) $(\text{sen } x^\circ)' = \frac{\pi}{180} \text{cos } x^\circ$.
 c) $(\text{sen } x^\circ)' = \frac{180}{\pi} \text{cos } x^\circ$.
 d) $(\text{cos } x^\circ)' = -\text{sen } x^\circ$.
 e) $(\text{cos } x^\circ)' = \frac{\pi}{180} \text{sen } x^\circ$.
 f) $(\text{cos } x^\circ)' = -\frac{\pi}{180} \text{sen } x^\circ$.
 g) $(\text{cos } x^\circ)' = -\frac{180}{\pi} \text{sen } x^\circ$.

JUSTIFICACIÓN: La relación entre medir x en sexagesimales, x^o , o en radianes, x^r , está dada por la igualdad $x^o = (180/\pi) \cdot x^r$. De aquí se deduce

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} x^o)' &= \left(\operatorname{sen} \left(\frac{180}{\pi} x^r \right) \right)' = (180/\pi) \cdot (\operatorname{cos}(\frac{180}{\pi} x^r)) \\ &= (180/\pi) \cdot \operatorname{cos} x^o \end{aligned}$$

51. **Propiedades de las funciones trigonométricas.** Denotamos por $\operatorname{cos} z, \operatorname{sen} z$ el coseno y seno complejo y por $\operatorname{ch} z = (e^z + e^{-z})/2, \operatorname{sh} z = (e^z - e^{-z})/2$ el coseno y el seno hiperbólico. Se pide, marcar todas las afirmaciones ciertas de entre las siguientes:

- a) Para todo número complejo z se verifica $|\operatorname{sen} z| \leq 1$.
- b) Para todo número complejo z se verifica $\operatorname{sh}^2 z - \operatorname{ch}^2 z = -1$.
- c) La función real $\operatorname{ch} x, x \in \mathbb{R}$, verifica $(\operatorname{ch} x)' = -\operatorname{sh} x$.
- d) Existen infinitos números complejos z verificando $\operatorname{sen} z = 4$.
- e) No existe ningún número real x verificando $\operatorname{sen} x = 4$.
- f) Para todo número complejo z se verifica $\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1$.

52. La expresión $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

- a) Vale $+\infty$.
- b) Vale cero.
- c) Vale ∞ .

53. La expresión $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

- a) No existe.
- b) Vale $+\infty$.
- c) Vale uno.
- d) Vale $-\infty$.

54. Si la gráfica de la función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$, es simétrica respecto al eje x entonces:

- a) f es la función cero.
- b) $x = 1$ es una asíntota vertical de f .
- c) $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

55. La función $f(x) = x^5 + x + 1, x \in \mathbb{R}$, verifica:

- a) Tiene un único cero positivo.
- b) Es una función creciente.
- c) Tiene dos puntos de inflexión.

56. La ecuación $x^5 + x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}$, verifica:

- a) No tiene ninguna solución negativa.
 b) Tiene una única solución.
 c) No tiene ninguna solución racional.

57. ¿Existe una función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que su gráfica sea la circunferencia de radio uno y centro el origen?

- a) Sí.
 b) No.

58. La función $f(x) = x^2/\sqrt{x^2 - 1}$, $x \in \mathbb{R}$, verifica:

- a) Su dominio es todo \mathbb{R} .
 b) f es cóncava hacia arriba en todo el dominio de definición.
 c) la recta $y = x$ es asíntota de f .
 d) f no posee ninguna asíntota vertical.
 e) Para $x = \pm\sqrt{2}$ la función f alcanza su valor mínimo.

59. Consideramos la función real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la igualdad $f(x) = x/\sqrt[3]{x^2 - 1}$. Se pide, marcar las afirmaciones ciertas de entre las siguientes:

- a) La recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de f .
 b) Los puntos $x = -3, 0, 3$ son de inflexión para f .
 c) $x = \sqrt{3}$ es el único máximo relativo de f .
 d) f es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

60. La función $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$ verifica:

- a) Es periódica.
 b) Está superiormente acotada por 1.
 c) Tiene infinitos ceros.

61. La función real $f(x) = x^{33} \cdot \cos x$ tiene en el origen:

- a) Un máximo relativo.
 b) Un punto de inflexión.
 c) Un mínimo relativo.

62. El desarrollo de Taylor en el origen de la función real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $f(x) = \sqrt{3} + x^{33} + x^{34} + o \cdot x^{34}$. De ello se deduce que el carácter del origen para f es:

- a) Un mínimo relativo.
 b) Un punto de inflexión.
 c) Ninguna de las anteriores.

63. De una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable se sabe que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces se puede afirmar:

- a) f' es positiva en $[a, b]$.
 b) Existe $c \in [a, b]$ de modo que $f'(c) = 0$.
 c) Existe $c \in (a, b)$ de modo que $f(c) = 0$.

64. La función real $f(x) = x^{33} \cdot \text{sen } x$ tiene en el origen:

- a) Un máximo relativo.
 b) Un punto de inflexión.
 c) Un mínimo relativo.

65. El desarrollo de Taylor en el origen de una función en dos variables $z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$z(x, y) = -3 + x^2 - 2xy + y^2 + o \cdot \|(x, y)\|^2$$

De ello se deduce que el carácter del origen para z es:

- a) Un mínimo relativo.
 b) Un punto de ensilladura.
 c) Un quasi-mínimo.

66. El desarrollo de Taylor en el origen de una función en dos variables $z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$z(x, y) = 3 + 4x + 2y - x^2 + 2xy + o \cdot \|(x, y)\|^2$$

De ello se deduce:

- a) El origen es un punto de ensilladura para z .
 b) El origen es un máximo relativo para z .
 c) El origen no es un punto crítico para z .

67. Sea C la gráfica de la función integrable $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ y S el valor del área de la región plana limitada por C , los ejes coordenados y la recta $x = 3$. Entonces:

- a) $S = \int_0^3 f(x) dx$.
 b) $S = \int_0^3 |f(x)| dx$.
 c) $S^2 = \int_0^3 f(x)^2 dx$.

68. El valor L de la longitud de una curva plana que en coordenadas polares posee la expresión $\rho = \rho(\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi]$, verifica:

- a) $L = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\alpha) + \rho'^2(\alpha)} d\alpha$
 b) $L = \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2(\alpha) d\alpha$
 c) $L = \int_0^\pi \sqrt{2\rho(\alpha) + \rho^2(\alpha)} d\alpha$

69. Utilizamos un sistema de referencia cartesiano (X, Y, Z) con unidad de longitud el metro. Denotamos por A la región del plano XY limitada por las rectas $X = 3, X = 4, Y = 0$, y la gráfica de la función real $f: [3, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) > 0$, y denotamos por H el sólido que se obtiene al revolucionar A respecto al eje Y . Entonces, el valor en metros cúbicos del valor del volumen de H es igual a:

- a) $\int_3^4 \pi f(x)^2 dx.$
 b) $\int_3^4 2\pi x \cdot f(x) dx.$
 c) $\int_3^4 \pi x \cdot f(x)^2 dx.$

70. El valor de la expresión $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ es:

- a) $+\infty.$
 b) $0.$
 c) $-2.$

71. Si f es una función real derivable, $D = \frac{d}{dx}$ es el operador derivada, α es un número real y n un número natural. Entonces, son ciertas todas las opciones que marco a continuación:

- a) $D^n(e^{\alpha x} f) = e^{\alpha x}[D^n + \alpha]f.$
 b) $D^n(e^{\alpha x} f) = e^{\alpha x}[D + \alpha]^n f.$
 c) $(D + \alpha)^n e^{\alpha x} f = e^{\alpha x} D^n f.$

72. Queremos introducir en MAPLE, como variables, la ecuación diferencial y las condiciones iniciales que expresamos a continuación

$$E: \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4.25x = 0$$

$$C: x(0) = 4, \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

para ello, ejecutamos las siguientes líneas, marcar todas las posibilidades correctas:

- a) $> E:=(D@@2)(x)(t)+D(x)(t)+(425/100)*x(t)=0;$
 $>C:=x(0)=4,D(x)(0)=0;$
 b) $> E:(D@@2)(x)(t)+D(x)(t)+(425/100)*x(t)=0;$
 $>C:=x(0)=4,D(x)(0)=0;$
 c) $>E:=(D@2)(x)(t)+D(x)(t)+(425/100)*x(t)=0;$
 $>C:=x(0)=4,D(x)(0)=0;$

73. Denotamos por $x(t)$ la única función real que verifica la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 0 \\ x(0) = a \\ \frac{dx(0)}{dt} = b \end{cases}$$

Poner en el siguiente recuadro, con dos cifras decimales, el valor $x(0.5)$, es decir, el valor de la función $x(t)$ cuando $t = 0.5$.

$0.584622a + 0.327669b$

JUSTIFICACIÓN: La ecuación diferencial se puede expresar $(D^2 - 2D + 2)x(t) = 0$. Ahora, teniendo en cuenta que las raíces del polinomio $D^2 - 2D + 2$ son $1 + i, 1 - i$, y que la ecuación diferencial es homogénea resulta que $x_G(t) = Ae^t \sin t + Be^t \cos t$. Considerando las condiciones iniciales, resulta $x(t) = [-(a) + (b)]e^t \sin t + (a)e^t \cos t$ y que $x(0.5) = 0.584622a + 0.327669b$

74. Del desplazamiento horizontal en metros, $x(t)$, que realiza una partícula P en el instante t , t en segundos, sabemos que se encuentra descrito por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + 4.25x(t) = 0 \\ x(0) = 4 \\ \frac{dx(0)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Con el fin de obtener la expresión explícita de dicho desplazamiento realizamos la siguiente sesión de MAPLE:

```
> E := (D@@2)(x)(t)+D(x)(t)+(425/100)*x(t)=0;
> C := x(0)=4, D(x)(0)=0;
> dsolve({E,C},x(t));
```

$$\begin{aligned} E &:= (D^{(2)})(x)(t) + D(x)(t) + \frac{17}{4}x(t) = 0 \\ C &:= x(0)=4, D(x)(0)=0 \\ x(t) &= e^{(-t/2)} \sin(2t) + 4e^{(-t/2)} \cos(2t) \end{aligned}$$

Marcar todas las afirmaciones ciertas que se deducen de lo anterior:

- a) P describe un movimiento armónico de amplitud constante igual a 4 metros.
- b) El desplazamiento horizontal de la partícula P en el instante $t = 0.5$ [s] es de 233.85 [cm].
- c) P describe un movimiento armónico amortiguado de amplitud decreciente y frecuencia 0.32 [Hz].
- d) P describe un movimiento armónico de amplitud creciente y periodo 3.14 [s].