Vamos a construir un conjunto no medible en el intervalo $[0,1]$ de $\mathbb{R}$. La construcción se basa en propiedades fundamentales de la medida de Lebesgue:

- que la medida de un intervalo es su longitud
- que si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, la medida de la unión es la serie de las medidas
$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$
- que si E es medible, y $x \in \mathbb{R}$, entonces $x+E$ es medible y $m(x+E) = m(E)$

Definimos una relación de equivalencia en $[0,1]$ por la condición
$x \sim y$ *si y sólo* $(x-y) \in \mathbb{Q}$*, es decir, si la diferencia* $x-y$ *es racional*

- Observemos que en efecto si $x \sim y$, entonces $y - x = -(x-y)$ es racional también, $y \sim x$
- Y si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces

$$\begin{array}{rcl} x-y &=& p/q \\ y-z &=& p'/q' \\ \hline x-z &=& \dfrac{pq'+qp'}{qq'} \end{array}$$

luego $x \sim z$

- Y evidentemente $x \sim x$ ya que $x - x = 0$

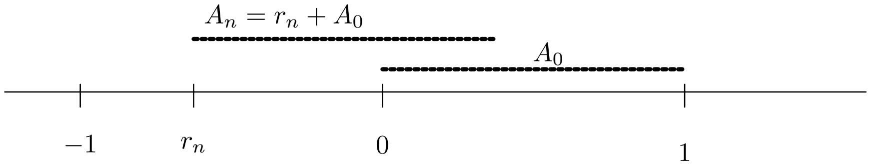
Sea ahora A_0 un subconjunto de $[0, 1]$ formado por un único elemento de cada clase de equivalencia.

Y consideremos la sucesión $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de todos los números racionales del intervalo $[-1, 1]$ $(r_n \neq r_m$ si $n \neq m)$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto A_n como el conjunto de puntos

$$A_n = \{r_n + x,\ x \in A_0\} = r_n + A_0$$

que consiste en trasladar el conjunto A_0 sumándole el número r_n



Si A_0 es medible, tenemos

1. Entonces cada conjunto A_n es medible, ya que traslación de un conjunto medible.

2. Además para cada $n \in \mathbb{N} \quad m(A_n) = m(A_0)$
3. Los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos:

   Si hubiese un $x \in A_M \cap A_N$, existirían $x_N \in A_0$ y $x_M \in A_0$ de modo que

   $$x = r_N + x_N = r_M + x_M$$

   de donde

   $$x_N - x_M = r_M - r_N \in \mathbb{Q}$$

   luego $x_N \sim x_M$.

   Como en A_0 sólo hay un elemento de cada clase de equivalencia, tiene que ser $x_N = x_M$, y por tanto $r_N = r_M$, y entonces $N = M$
4. La unión de todos los conjuntos A_n, $\quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad$, contiene al intervalo $[0, 1]$ y está contenida en el intervalo $[-1, 2]$

   Todo punto $x \in [0, 1]$ tiene que estar en alguna de las clases de equivalencia definidas por la relación, luego tiene que existir un $x_0 \in A_0$ tal que $x \sim x_0$, y por tanto $\quad r = x - x_0$ es un racional; y como x y x_0 están en $[0, 1]$, $\quad r \in [-1, 1]$ será uno de los elementos de la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $r = r_k$ y $x = r_k + x_0 \in A_k$

AAVVR

Construcción de un conjunto no medible Lebesgue.

Así que $[0,1] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Por otro lado, si x está en un conjunto A_n, $x = r_n + x_n$ con $r_n \in [-1,1]$ y $x_n \in A_0 \subseteq [0,1]$, luego $x \in [-1,2]$

5. En consecuencia

$$1 = m[0,1] \leq m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \leq 3 = m[-1,2]$$

lo que es imposible tanto si $m(A_n) = m(A_0) = 0$ para todo n como si $m(A_n) = m(A_0) > 0$ para todo n

POR TANTO A_0 NO ES MEDIBLE LEBESGUE.

Bibliografía: T.M. Apostol. *"Análisis Matemático"*. Ed. Reverté