1. Funciones Medibles

Hasta ahora hemos estudiado la medida de Lebesgue definida sobre los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ y sus propiedades. Vamos a aplicar ahora esta teoría al estudio de las funciones escalares de varias variables .

Definición (Funciones medibles – Lebesgue). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $E \in \mathfrak{M}$, y $f : E \to \mathbb{R}$. Se dice que f es medible – Lebesgue si para todo abierto G en $\mathbb{R}$, la imagen inversa*

$$f^{-1}(G) = \{x \in E,\ f(x) \in G\}$$

es un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$

Observaciones:

1. En primer lugar, $E = f^{-1}(\mathbb{R})$ debe ser medible. Sólo tiene sentido hablar de funciones medibles si están definidas en conjuntos medibles.

2. Son equivalentes:

   (a) f medible –Lebesgue

   (b) Para todo conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ cerrado, $f^{-1}(C) \in \mathfrak{M}$

   (c) Para todo rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}$, $f^{-1}(R) \in \mathfrak{M}$

   En efecto, si f es medible y C es cerrado, el complementario $\mathbb{R} \setminus C$ es abierto, luego $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus C)$, es medible, y por tanto

   $$f^{-1}(C) = E \setminus f^{-1}(\mathbb{R} \setminus C)$$

   también es medible. Así (1) implica (2)

   Que (2) implica (3) es trivial, porque los rectángulos son cerrados.

   Por último, supongamos que se verifica la hipótesis (3). Si G es un abierto, se puede poner como unión numerable de rectángulos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, de modo que

   $$f^{-1}(G) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(R_n)$$

   será medible. Por tanto f es medible.

3. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible si y sólo si su función característica

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ \chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

es medible.

En efecto, supongamos que A es medible, y sea G un abierto cualquiera en $\mathbb{R}$. Si estudiamos cómo es $\chi_A^{-1}(G)$, tenemos

$$\chi_A^{-1}(G) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad 0 \notin G,\ 1 \notin G \\ \mathbb{R} \setminus A & \text{si} \quad 0 \in G,\ 1 \notin G \\ A & \text{si} \quad 0 \notin G,\ 1 \in G \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad 0 \in G,\ 1 \in G \end{cases}$$

y en cualquier caso es medible.

Recíprocamente, si χ_A es medible, tomando como G un abierto que contenga al 1 y no al 0, como $G = (1/2, 3/2)$, se tiene $A = \chi_A^{-1}(G)$, y por tanto A es medible.

La familia de las funciones medibles son la base sobre la que construir la integral, como las funciones continuas lo eran para la construcción de la integral de Cauchy. De hecho, lo primero que vamos a ver es que toda función continua es medible:

Teorema.
Toda función continua definida en un conjunto medible es medible.

Demostración:

Sea E un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$, y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si G es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, sabemos que por las propiedades de las funciones continuas $f^{-1}(G)$ es abierto en E, es decir, existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(G) = E \cap U$. Así E es medible por definición de función medible, y U es medible por ser abierto, luego $f^{-1}(G)$ es medible.

Por tanto f es medible. $\square$

Además la composición de una función medible con una función continua también es medible (ojo, no la composición de dos funciones medibles); así por ejemplo si $f(x)$ es medible, entonces $g(x) = \mathrm{sen}(f(x))$ también es medible :

Teorema.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible, y $g : f(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $f(E)$. Entonces $g \circ f$ es medible.

Demostración:
Sea G un abierto cualquiera en $\mathbb{R}$. Como $g : f(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, $g^{-1}(G)$ es abierto de $f(E)$, es decir, existe una abierto U de $\mathbb{R}$ tal que $g^{-1}(G) = U \cap f(E)$. Y entonces

$$(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}(g^{-1}(G)) = f^{-1}(U \cap f(E)) = f^{-1}(U)$$

es medible. Así pues $g \circ f$ es medible. □

Vamos a ver también que el límite de una sucesión de funciones medibles es medible, y algunos otros resultados parecidos. Para ello es útil la siguiente caracterización de las funciones medibles:

Teorema.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, *y* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. *Son equivalentes:*

1. f *es medible*
2. *Para todo* $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in E : \ f(x) < a\} \in \mathfrak{M}$
3. *Para todo* $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in E : \ f(x) \le a\} \in \mathfrak{M}$
4. *Para todo* $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in E : \ f(x) > a\} \in \mathfrak{M}$
5. *Para todo* $a \in \mathbb{R}$, $\{x \in E : \ f(x) \ge a\} \in \mathfrak{M}$

Demostración:

Es claro que (1) implica las propiedades $(2), (3), (4)$ y (5) ya que

$$\{x \in E : \ f(x) < a\} = f^{-1}(-\infty, a)$$

$$\{x \in E : \ f(x) \leq a\} = f^{-1}(-\infty, a]$$

$$\{x \in E : \ f(x) > a\} = f^{-1}(a, \infty)$$

y

$$\{x \in E : \ f(x) \geq a\} = f^{-1}[a, \infty)$$

son imágenes inversas por f de conjuntos abiertos o cerrados según el caso.

Vamos a ver ahora que las propiedades (2) a (5) son equivalentes entre si.

En primer lugar, si suponemos que se verifica (2), es decir que los conjuntos del tipo $\{x \in E : \ f(x) < a\}$ son medibles para todo $a \in \mathbb{R}$, poniendo

$$\{x \in E : \ f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : \ f(x) < a + \frac{1}{n}\}$$

se tiene que los conjuntos del tipo $\{x \in E : \ f(x) \leq a\}$ son intersección numerable de conjuntos medibles, y por tanto son medibles, lo que prueba la propiedad (3).

En segundo lugar,

$$\{x \in E: \ f(x) > a\} = E \setminus \{x \in E: \ f(x) \leq a\}$$

luego (3) implica (4).

En tercer lugar, si se verifica (4), razonando como antes y poniendo

$$\{x \in E: \ f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E: \ f(x) > a - \frac{1}{n}\}$$

se tiene (5).

Y en cuarto lugar, si se verifica (5), como

$$\{x \in E: \ f(x) < a\} = E \setminus \{x \in E: \ f(x) \geq a\}$$

se tiene también (1).

Para terminar la demostración, una vez visto que las últimas cuatro propiedades son equivalentes entre si, utilizando las propiedades (3) y (5) se tiene que para todo rectángulo $R = [a, b]$ en $\mathbb{R}$,

$$f^{-1}[a, b] = \{x \in E: \ a \leq f(x) \leq b\} = \{x \in E: \ f(x) < b\} \cap \{x \in E: \ f(x) \geq a\}$$

será medible, y por tanto f es medible, y se tiene (1). $\square$

Corolario 1.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, y sean $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces, si existen, las funciones

$$g(x) = \sup_n f_n(x)$$

$$h(x) = \inf_n f_n(x)$$

$$j(x) = \liminf_n f_n(x)$$

$$k(x) = \limsup_n f_n(x)$$

$$l(x) = \lim_n f_n(x)$$

son medibles.

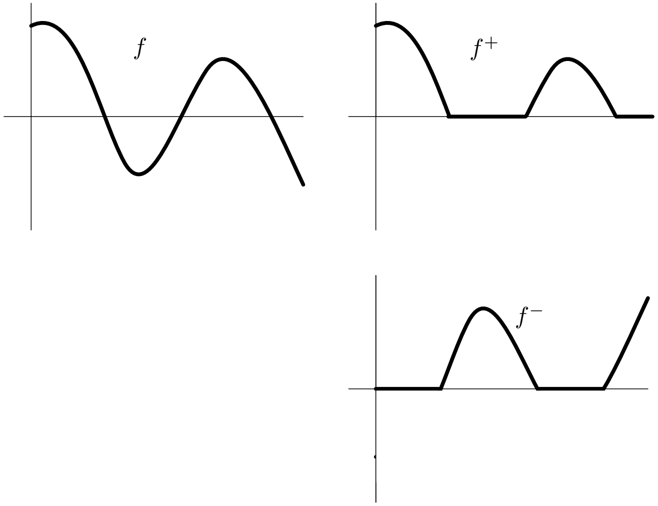
Y también el producto de un número por una función medible es una función medible.

Corolario 2.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ medible. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene αf es medible.

Observaciones:

1. El primer corolario se aplica por supuesto también a familias finitas de funciones: si $f_1, \dots, f_k$ son funciones medibles en un conjunto E, las funciones $f(x) = \max\{f_i(x),\ 1 \le i \le k\}$ y $g(x) = \min\{f_i(x),\ 1 \le i \le k\}$ son medibles.

2. Como consecuencia, las funciones $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \max\{-f(x), 0\}$ son medibles.



2. Funciones simples

El siguiente objetivo es demostrar que la suma de funciones medibles es medible, pero esto es bastante más difícil. Para llegar a este resultado, vamos a introducir un tipo especial de funciones, que vamos a utilizar también como base para la construcción de la integral de estas funciones medibles: las funciones simples.

Definición (Funciones Simples)**.** *Sea* $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$*; se llama función simple en* E *a una función medible* $s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *que sólo toma un número finito de valores, es decir, tal que* $s(E) = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ *es finito.*

Llamando $A_i = s^{-1}(\{a_i\}) = \{x \in E : s(x) = a_i\}$, estos conjuntos son medibles (por ser imágenes inversas de cerrados), y verifican

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
- $E = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k} A_i$
- y se puede escribir $s(x)$ de la forma $s(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x)$ combinación lineal de funciones características de conjuntos A_i,

De hecho, las funciones simples son las combinaciones lineales de funciones características de conjuntos medibles: cualquier combinación lineal de funciones características de conjuntos medibles se puede descomponer como otra combinación lineal respecto a una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos cuya unión es todo el conjunto E

Es fácil verlo con un ejemplo sencillo: si

$$s(x) = a_1\chi_{A_1}(x) + a_2\chi_{A_2}(x)$$

con A_i subconjuntos medibles de E, podemos escribir

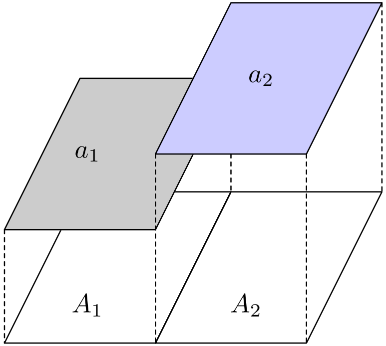
$$s(x) = a_1\chi_{A_1\setminus A_2}(x) + a_2\chi_{A_2\setminus A_1}(x) + (a_1 + a_2)\chi_{A_1\cap A_2}(x) + 0\chi_{E\setminus(A_1\cup A_2)}(x)$$

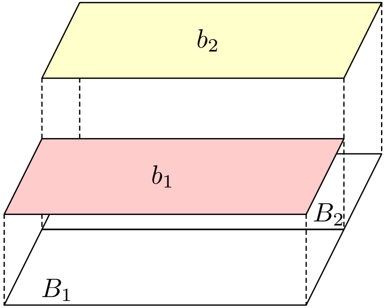
Una descomposición de este tipo la llamaremos "elemental".

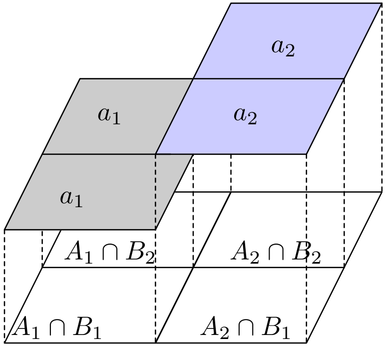
Si S_1 y S_2 son dos funciones simples, $\quad S_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i} \quad$ y $\quad S_2 = \sum_{j=1}^{k} b_j\chi_{B_j}, \quad$ (descomposiciones elementales), se puede conseguir una descomposición elemental de ambas con respecto a la misma familia de conjuntos, $\{B_i \cap A_j\}_{i,j}$

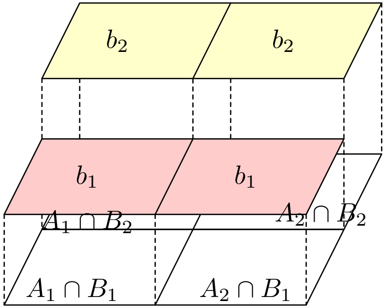
AAVVR

Funciones medibles. Funciones integrables –Lebesgue. Relación con la integral de Riemann









En general, como los conjuntos B_j son disjuntos dos a dos y $\cup_{j=1}^k B_j = E$, entonces

$$\chi_E(x) = \chi_{\cup_{j=1}^k B_j}(x) = \sum_{j=1}^k \chi_{B_j}(x) = 1$$

y podemos poner

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \sum_{i=1}^m \chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^m \chi_{A_i}(x)\Big(\sum_{j=1}^k \chi_{B_j}(x)\Big) = \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^k \chi_{A_i}(x)\chi_{B_j}(x) = \sum_{i=1,j=1}^{m,k} a_i\chi_{A_i\cap B_j}(x) \end{aligned}$$

Y análogamente

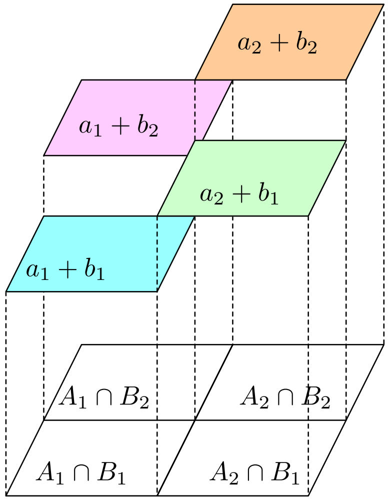
$$S_2(x) = \sum_{j=1}^k b_j\chi_{B_j}(x) = \sum_{j=1,i=1}^{k,m} b_j\chi_{B_j\cap A_i}(x)$$

Así es fácil demostrar que la suma de dos funciones simples es una función simple: si $S_1 = \sum_{i=1}^m a_i\chi_{A_i}$ y $s_2 = \sum_{i=1}^m b_i\chi_{A_i}$, la suma $S_1 + S_2$, es

AAVVR

Funciones medibles. Funciones integrables –Lebesgue. Relación con la integral de Riemann

$$(S_1 + S_2)(x) = S_1(x) + S_2(x) = \sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i)\chi_{A_i}$$



Análogamente $S_1 \cdot S_2 = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot b_i \chi_{A_i}$, y $S_1/S_2 = \sum_{i=1}^{m}(a_i/b_i)\chi_{A_i}$ son funciones simples (si $S_2(x) \neq 0$ para todo $x \in E$ en el caso del cociente). Y evidentemente, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha S_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha \cdot a_i \chi_{A_i}$ es también una función simple.

El siguiente teorema es fundamental para la construcción de la integral:

Teorema (Aproximación de funciones medibles)**.**
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, *y* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función medible no negativa. Existe una sucesión* $\{s_n\}_n$ *de funciones simples de* E *en* $\mathbb{R}$, *tales que*

1. $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ *para todo* $x \in E$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$
2. $\lim_n s_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in E$

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Se definen los conjuntos

$$E_0^n = \{x \in E,\ f(x) \geq n\}$$

y

$$E_i^n = \{x \in E,\ (i-1)2^{-n} \leq f(x) < i2^{-n}\};\ 1 \leq i \leq n2^n$$

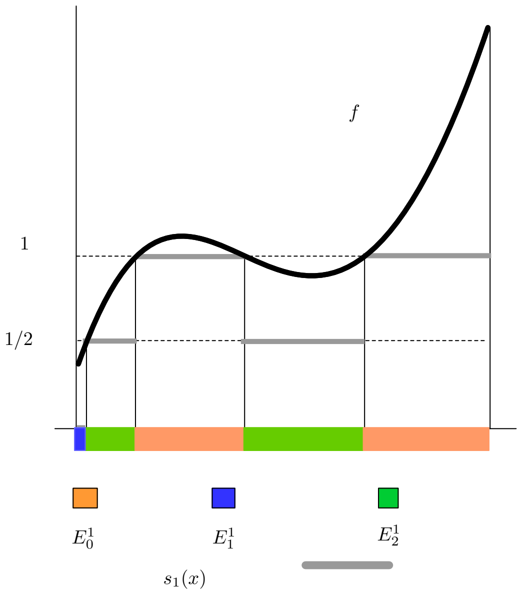
que son conjuntos medibles, disjuntos dos a dos, y se definen las funciones

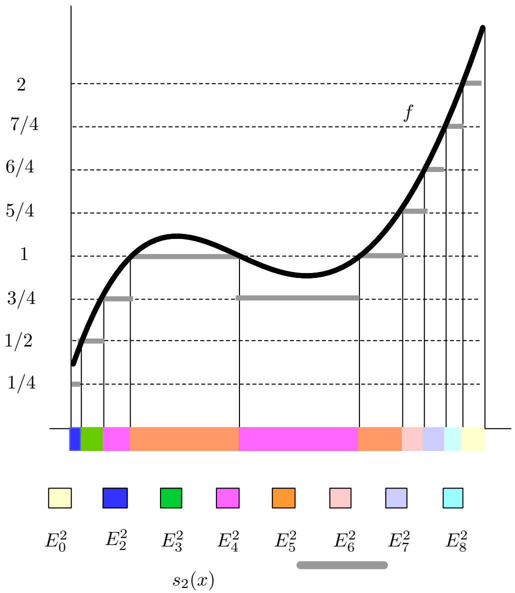
$$s_n(x) = \begin{cases} (i-1)2^{-n} & \text{si} \quad x \in E_i^n;\ 1 \leq i \leq n2^n \\ n & \text{si} \quad x \in E_0 \end{cases}$$

es decir,

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_i^n}(x) + n\chi_{E_0^n}(x)$$

Veamos un esquema gráfico de la construcción de los conjuntos y de las funciones, para $n = 1$ y $n = 2$





En este caso, el conjunto E_1^2 es vacío.

La idea es dividir el eje vertical en bandas horizontales de anchura 2^{-n}, y construir una funciones escalonadas cuyos escalones están definidos por estas bandas, que estén siempre por debajo de la gráfica de f, pero lo más cerca posible.

Es evidente por la definición que para todo $x \in E$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $s_n(x) \geq 0$.

En segundo lugar, dado $n \in \mathbb{N}$, poniendo el intervalo

$$\left[\frac{(i-1)}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right] = \left[\frac{2(i-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right] = \left[\frac{2(i-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right]$$

se tiene

$$\begin{aligned} E_i^n &= \{x \in E,\ \frac{(i-1)}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\} = \\ &= \{x \in E,\ \frac{2(i-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2i}{2^{n+1}}\} = \\ &= \{x \in E,\ \frac{2(i-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2i-1}{2^{n+1}}\} \cup \\ &\qquad \cup \{x \in E,\ \frac{2i-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2i}{2^{n+1}}\} = \\ &= E_{2(i-2)}^{n+1} \cup E_{2i-1}^{n+1} \end{aligned}$$

Así que si $x \in E_i^n$, para algún i entre 1 y $n2^n$, pueden ocurrir dos cosas:
O bien $x \in E_{2(i-1)}^{n+1}$, y entonces

$$s_{n+1}(x) = \frac{2(i-1)}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^n} = s_n(x)$$

o bien $x \in E_{2i-1}^{n+1}$ y entonces

$$s_{n+1}(x) = \frac{2i-1}{2^{n+1}} > \frac{i-1}{2^n} = s_n(x)$$

Y si $x \in E_0^n$, es decir, si $f(x) \geq n$, también pueden ocurrir dos cosas:
O bien $f(x) \geq (n+1)$, en cuyo caso $s_{n+1}(x) = n+1 > n = s_n(x)$
O por el contrario $n \leq f(x) < n+1$, y entonces

$$f(x) \in [n, n+1] = \bigcup_{k=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} [\frac{k-1}{2^{n+1}}, \frac{k}{2^{n+1}}]$$

luego

$$s_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^{n+1}} \geq n = s_n(x)$$

Es decir, siempre $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$

Para terminar la demostración falta ver que $\lim_n s_n(x) = f(x)$, pero esto es claro: dado $x \in E$, sea n_0 un número natural tal que $f(x) < n_0$. Por la definición de las funciones s_n, para todo $n \geq n_0$ la distancia $f(x) - s_n(x)$ es menor que 2^{-n} que es la anchura de los escalones de s_n, luego en efecto

$$\lim_n |f(x) - s_n(x)| \leq \lim_n 2^{-n} = 0$$

(Volver al enunciado) □

Como consecuencia:

Teorema.
Toda función medible es límite puntual de una sucesión de funciones simples.

Corolario 3.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, y $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones medibles. Entonces:

1. $f + g$ *y* $f - g$ *son medibles*
2. $f \cdot g$ *es medible*
3. *Si* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in E$, f/g *es medible*
4. $|f|$ *es medible*

Una última propiedad de las funciones medibles que utilizaremos con frecuencia es la siguiente: si dos funciones son iguales en "casi todos los puntos de E", o ambas son medibles, o ninguna de las dos lo es.

Proposición.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, y $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que existe un conjunto $Z \subseteq E$ con $m(Z) = 0$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E \setminus Z$. Entonces f es medible si y sólo si g es medible.

Demostración:

Supongamos que f es medible. Para ver que g es medible, sea U un abierto de cualquiera de $\mathbb{R}$; podemos poner

$$g^{-1}(U) = \big(g^{-1}(U) \cap (E \setminus Z)\big) \cup \big(g^{-1}(U) \cap Z\big)$$

De aquí, el primer conjunto es

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) \cap (E \setminus Z) &= \{x \in E \setminus Z : \ g(x) \in U\} = \\ &= \{x \in E \setminus Z : \ f(x) \in U\} = f^{-1}(U) \cap (E \setminus Z) \end{aligned}$$

que es medible por ser f medible y Z medible.

Y el segundo conjunto es un subconjunto de Z, luego también tiene que tener medida cero, como Z, y por tanto es medible.

Entonces $g^{-1}(U)$ es medible.

Así pues g es una función medible. Análogamente, cambiando los lugares de f y de g se prueba que si g es medible, f también lo es. $\square$

En otras palabras, este resultado muestra que si una función f no es medible, no se puede "arreglar" cambiando los valores de la función en un conjunto de puntos de medida cero; y que, recíprocamente, si f es medible, tampoco se va a "estropear" si se cambian sus valores en un conjunto de puntos de medida cero.

El hecho de que una de propiedad se verifique en "casi todos los puntos" de un conjunto E, es una característica fundamental de la teoría de Lebesgue, y recibe un nombre:

Definición (Propiedad en casi todo punto)**.**
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n,\ E \in \mathfrak{M}$. *Se dice que una cierta propiedad* P *se verifica en casi todo punto de* E *si existe un conjunto* $Z \subseteq E$ *con* $m(Z) = 0$, *tal que* P *se verifica para todo* $x \in E \setminus Z$.

3. Integración de funciones simples

Vamos ahora a construir la integral de Lebesgue de funciones medibles. La idea es construir la integral de Lebesgue primero para funciones simples, luego para funciones medibles no negativas, y por último para funciones medibles cualesquiera. En cada caso demostraremos algunas propiedades elementales que son necesarias para el paso siguiente, y que van encaminadas a demostrar las propiedades elementales de cualquier procedimiento de integración: la linealidad y la monotonía de la integral, es decir, que la integral de la suma es la suma de las integrales, que la integral de un número por una función es el producto del número por la integral de la función, y que si una función es mayor que otra en el mismo conjunto, su integral es también mayor.

Definición (Integral de una función simple no negativa)**.**

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, *y sea* $s : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función simple no negativa,* $s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$, *con* $a_i \geq 0$ *para todo* i, $1 \leq i \leq k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *si* $i \neq j$, *y* $\cup_{i=1}^{k} A_i = E$ *Se define la integral de* s *en* E *por*

$$\int_E s = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i)$$

con el convenio de que $0 \cdot \infty = 0$

Observaciones:

1. La definición es correcta, en el sentido de que el resultado de la integral no depende de la descomposición de s como combinación lineal de funciones características, incluso aunque los conjuntos no sean disjuntos dos a dos.

   Vamos a ver que esto es cierto con un ejemplo sencillo: supongamos que $s = a\chi_A + b\chi_B$, donde A y B son subconjuntos medibles de un conjunto E, pero no necesariamente disjuntos. Podemos obtener una descomposición elemental de s de la forma

   $$s = a\chi_{A\setminus B} + (a+b)\chi_{A\cap B} + b\chi_{B\setminus A} + 0\chi_{E\setminus(A\cup B)}$$

   Aplicando entonces la definición de la integral

   $$\begin{aligned}\int_E s &= am(A\setminus B) + (a+b)m(A\cap B) + bm(B\setminus A) + \\ &\quad +0m(E\setminus(A\cup B)) = \\ &= a\left(m(A\setminus B) + m(A\cap B)\right) + b(m(A\cap B) + m(B\setminus A)) = \\ &= am(A) + bm(B)\end{aligned}$$

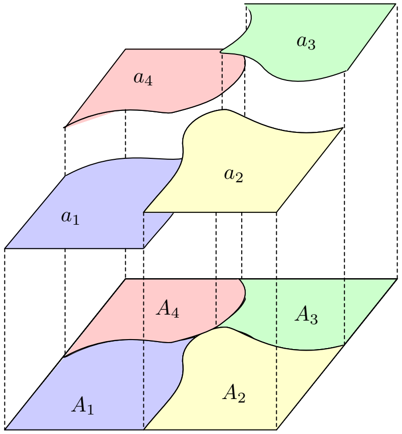
   (utilizando que A y B son medibles)

2. La razón de definir la integral sólo para funciones no negativas es asegurar que la suma $\sum_{i=1}^{m} a_i m(A_i)$ esté bien definida, que no pueda dar lugar a algo del tipo $\infty - \infty$.

3. La integral será no negativa, pero puede valer infinito

$$0 \leq \int_E s \leq \infty$$

4. Geométricamente, la integral de s es la suma de los "volúmenes", o mejor habría que decir la suma de las medidas, de los prismas de base los conjuntos A_i y alturas respectivas a_i



Proposición.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, *y sean* $s_1, s_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones simples no negativas. Entonces:*

1. $\displaystyle\int_E (s_1 + s_2) = \int_E s_1 + \int_E s_2$
2. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $\displaystyle\int_E \alpha s_1 = \alpha \int_E s_1$
3. *Si existe* $Z \subseteq E$ *con* $m(Z) = 0$, *tal que* $s_1(x) \leq s_2(x)$ *para todo* $x \in E \setminus Z$, *entonces* $\displaystyle\int_E s_1 \leq \int_E s_2$

Demostración:

Consideremos para s_1 y para s_2 descomposiciones elementales respecto a la misma familia de conjuntos, $s_1 = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$ y $s_2 = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{A_i}$.

Las demostraciones de los apartados (1) y (2) son triviales.

Para el apartado (3), sea $Z \subseteq E$ un conjunto de medida cero tal que $s_1(x) \leq s_2(x)$ para todo $x \in E \setminus Z$. Entonces para cada conjunto A_i, como Z es medible, se tiene

$$m(A_i) = m(A_i \cap Z) + m(A_i \setminus Z) = m(A_i \setminus Z)$$

ya que $A_i \cap Z$ tiene medida cero.

Además, si existe algún punto $x \in A_i \setminus Z$, $s_1(x) = a_i \leq s_2(x) = b_i$ luego

$$a_i m(A_i \setminus Z) \leq b_i m(A_i \setminus Z)$$

y si $A_i \setminus Z = \emptyset$, también trivialmente

$$a_i m(A_i \setminus Z) = 0 = b_i m(A_i \setminus Z)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int_E s_1 &= \sum_{i=1}^{m} a_i m(A_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i m(A_i \setminus Z) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} b_i m(A_i \setminus Z) = \sum_{i=1}^{m} b_i m(A_i) = \int_E s_2\end{aligned}$$

$\square$

4. Integral de funciones no negativas

Definición.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n,\ E \in \mathfrak{M}$, *y* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función medible con* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in E$. *Se define la integral de* f *en* E *por*

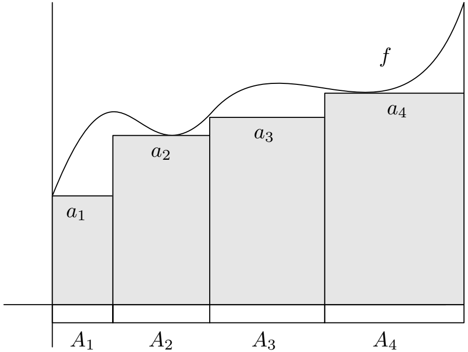
$$\int_E f = \sup\{\int_E s,\ s \text{ función simple},\ 0 \leq s \leq f\}$$

Observaciones:

1. Se puede sustituir la condición $0 \leq s \leq f$ en E, por la condición $0 \leq s(x) \leq f(x)$ en casi todo E.

2. La integral de una función medible no negativa será siempre no negativa también, pero puede ser infinita.

3. Geométricamente el significado de esta integral es similar a las sumas inferiores de Riemann. La diferencia fundamental está en los conjuntos A_i que utilizamos para dividir el conjunto E: podemos escoger cualquier clase de conjuntos medibles, no solamente rectángulos.



La proposición siguiente es consecuencia inmediata de las propiedades de la integral de funciones simples no negativas:

Proposición.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, *y sean* $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones medibles no negativas. Se tiene:*

a) Si $f \leq g$ *en casi todo* E, *entonces* $\int_E f \leq \int_E g$

b) Si $f = g$ *en casi todo* E, *entonces* $\int_E f = \int_E g$

c) Si $\alpha > 0$, $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$

5. Funciones Integrables–Lebesgue. Relación con la Integral de Riemann.

Aunque la definición de la integral de Lebesgue es correcta para cualquier función medible no negativa, sólo vamos a llamar *integrables* a las funciones cuya integral es finita; más exactamente,

Definición (Función Integrable Lebesgue).
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$ *y* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$*. Se dice que* f *es integrable – Lebesgue en* E *si es medible y* $\int_E |f| < \infty$*. Se define entonces la integral en* E *de* f *por*

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

Observaciones:
Obsérvese que $\int_E f$ está bien definida, en el sentido de que como $0 \leq f^+ \leq |f|$, entonces $0 \leq \int_E f^+ \leq \int_E |f| < \infty$; y también $0 \leq f^- \leq |f|$, así que $0 \leq \int_E f^- \leq \int_E |f| < \infty$. Si f es integrable, su integral es *un número*.

Proposición.
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}$, *y* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable. Entonces*

$$|\int_E f| \leq \int_E |f|$$

Demostración:

De las desigualdades $0 \leq \int_E f^+ \leq \int_E |f| < \infty$ y $0 \leq \int_E f^- \leq \int_E |f| < \infty$ se deduce

$$-\int_E |f| \leq \int_E f^+ - \int_E f^- \leq \int_E |f|$$

luego en efecto

$$|\int_E f| \leq \int_E |f|$$

$\square$

Tendremos que demostrar que esta forma de integrar tiene las propiedades fundamentales que debe tener cualquier método de integración, alguna de las cuales hemos ido demostrando en las casos anteriores para funciones simples y funciones medibles no negativas: la linealidad de la integral, y la aditividad con respecto al dominio. Pero vamos a dejar el estudio de estas propiedades hasta el próximo capítulo.

Antes vamos a ver que la integral de Lebesgue generaliza a la de Riemann, en el sentido de que si E es un rectángulo y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable–Riemann, entonces f es medible, integrable–Lebesgue, y además las dos integrales coinciden. Llamaremos $(R)\int_E f$ a la integral de Riemann de f en E, y $(L)\int_E f$ a la integral de Lebesgue.

Teorema (Relación con la Integral de Riemann)**.**
Sea E un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Riemann. Entonces f es también integrable Lebesgue, y

$$(R)\int_E f = (L)\int_E (f)$$

Demostración: ▶ (Saltar al final de la demostración)

Observemos en primer lugar que como E es un rectángulo, es un conjunto medible Lebesgue. Vamos a demostrar que f es medible Lebesgue, que es integrable, y que su integral de Lebesgue coincide con su integral de Riemann.

Como f es integrable Riemann, es acotada, y existe un conjunto $Z \subseteq E$ con $m(Z) = 0$ de modo que la restricción de f a $E \setminus Z$ es continua.

Sea G un abierto de $\mathbb{R}$. Podemos poner

$$f^{-1}(G) = \left(f^{-1}(G) \cap Z\right) \cup \left(f^{-1}(G) \cap (E \setminus Z)\right)$$

De estos dos conjuntos $f^{-1}(G) \cap Z \subseteq Z$, luego tiene medida cero y por tanto es medible Lebesgue.

Y $f^{-1}(G) \cap (E \setminus Z) = (f|_{E\setminus Z})^{-1}(G)$ que es un abierto de $E \setminus Z$ por la continuidad de f en ese conjunto, luego existe un abierto U de $\mathbb{R}^n$ de modo que

$$f^{-1}(G) \cap (E \setminus Z) = U \cap (E \setminus Z)$$

que es medible.

Así pues, para todo abierto G de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(G)$ es medible, y por tanto f es medible Lebesgue.

Por otro lado, de la acotación de F se tiene que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x de E, o lo que es lo mismo, $|f| \leq M\chi_E$. Entonces por las propiedades de la integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas,

$$\int_E |f| \leq \int_E M\chi_E = M\, m(E) = Mv(E) < \infty$$

Para demostrar la igualdad entre las dos integrales, supongamos primero que f es no negativa.

Para cada partición P de E, definimos la función simple

$$s(x) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} M_R(f)\,\chi_R(x)$$

Esta función verifica $\quad 0 \leq f(x) \leq s(x) \quad$ para todo $x \in E$, y por las propiedades de la integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas, entonces

$$(L)\int_E f \leq (L)\int_E s = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} M_R(f)\,m(R) = \overline{S}(f,P)$$

Tomando ínfimos entre todas las particiones de E, se tiene

$$(L)\int_E f \leq (R)\int_E f$$

Definimos ahora la función simple

$$k(x) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} m_R(f)\,\chi_{R^0}(x)$$

Esta función verifica que $\quad 0 \leq k(x) \leq f(x) \quad$ para todo $x \in E$, y por las propiedades de la integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas,

$$(L)\int_E f \geq (L)\int_E k = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} m_R(f)\,m(R^0) = \underline{S}(f,P)$$

Tomando supremos entre todas las particiones de E, se tiene

$$(L)\int_E f \geq (R)\int_E f$$

Para terminar, en el caso general (sin suponer que f es no negativa), basta considerar las funciones f^+ y f^-: Si f es integrable Riemann, también f^+ y f^- son integrables Riemann, y además como $f = f^+ - f^-$, se tiene

$$(R)\int_E f = (R)\int_E f^+ - (R)\int_E f^- = (L)\int_E f^+ - (L)\int_E f^- = (L)\int_E f$$

con lo que queda demostrado el teorema.

◀(Volver al enunciado) □