Proposición. *Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es integrable en A.*

Demostración:

Como f es continua en A, y A es compacto, f es acotada en A, y uniformemente continua. Dado entonces $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in A$ con $\|x - y\|_\infty < \delta$ se tiene $|f(x) - f(y)| < \epsilon/v(A)$.

Consideremos una partición P de A de modo que cada rectángulo tenga lado menor que δ. Si $R \in \Re_P$ es un rectángulo cualquiera definido por P, se tiene:

- Para todos $x, y \in R$, $\|x - y\|_\infty \leq \delta$
- Por ser f continua y R compacto, existen x_0, y_0 en R tales que $f(x_0) = \sup\{f(t) :\ t \in R\}$ y $f(y_0) = \inf\{f(t) :\ t \in R\}$
- Entonces

$$M_R(f) - m_R(f) = f(x_0) - f(y_0) \leq |f(x_0) - f(y_0)| \leq \epsilon/v(A)$$

En consecuencia

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{R \in \Re_P} (M_R(f) - m_R(f))v(R) \leq \frac{\epsilon}{v(A)} \sum_{R \in \Re_P} v(R) = \epsilon$$

Así pues, f cumple el criterio de Riemann, y por tanto es integrable.

□

El resultado muestra que la integral de Riemann es una generalización de la integral de Cauchy de funciones continuas. Queda abierto el problema de si ambas integrales coinciden. Más concretamente, se trata de estudiar si hay alguna otra función integrable que no sea continua (o continua a trozos, con un número finito de discontinuidades).

Este problema quedó resuelto por Lebesgue hacia 1920, gracias a una nueva interpretación de los conjuntos de $\mathbb{R}^n$, basada en la descripción analítica de los conceptos de área y volumen de un cuerpo geométrico. Lebesgue introdujo una teoría nueva, llamada Teoría de la Medida, que establece una íntima relación entre los conjuntos y las funciones integrables en ellos. En este capítulo vamos a ver sólo una pequeña aplicación de la teoría, que nos permite resolver el problema de la integrabilidad Riemann.

Se trata de medir el "tamaño" del conjunto de puntos de discontinuidad de una función, de una manera que no tiene que ver con conceptos métricos (acotado o no acotado,...), topológicos (compacto,...), algebraicos (finito, numerable,...)

Definición (Conjuntos de Medida Cero)**.** *Sea A un conjunto en $\mathbb{R}^n$. Se dice que A tiene medida cero si verifica:*

Para todo $\epsilon > 0$ existe una familia numerable de rectángulos cerrados en $\mathbb{R}^n$ $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) < \epsilon$

Observación: En la definición pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos o semiabiertos.

Otra observación evidente, es que si A y B son dos subconjuntos, con $A \subseteq B$, y B tiene medida cero, A también tiene medida cero.

Ejemplos:

1) Todo conjunto numerable tiene medida cero.

En efecto, sea $A = \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, y sea $\epsilon > 0$. Podemos escoger para cada $m \in \mathbb{N}$ un rectángulo centrado en x_m, R_m, cuyo volumen sea $\epsilon/2^m$ (por ejemplo considerando en $\mathbb{R}^n$ la norma infinito, basta definir cada R_m como la bola centrada en x_m, de radio $r = 1/2\sqrt[n]{\epsilon/2^m}$) Entonces $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} R_m$ y $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} v(R_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon/2^m = \epsilon$

De hecho, también podemos sumergir A en una unión numerable de rectángulos de volumen cero, de modo que la serie $\sum_{m=1}^{\infty} v(R_m) = 0$, tomando para cada punto $x_m \in A$ $R_m = \{x_m\}$, puesto que el conjunto formado por el punto x_m es un rectángulo cerrado,

$$\{x_m\} = [x_{m_1}, x_{m_1}] \times \cdots \times [x_{m_n}, x_{m_n}]$$

y su volumen es cero.

En particular, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable, y por tanto tiene medida cero. Análogamente $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero.

2) Pero para tener medida cero no hace falta ser numerable, ni siquiera acotado:

En $\mathbb{R}^n$, un segmento paralelo a uno de los ejes, tiene medida cero. Incluso una recta paralela a uno de los ejes coordenados, tiene medida cero:

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, consideremos la recta $y = y_0$.

La semi-recta derecha $A = \{(x, y_0), x \in \mathbb{R}\}$ la podemos sumergir en la unión de los rectángulos $R_k = [k, k+1] \times [y_0 - \frac{\epsilon}{2^{k+3}}, y_0 + \frac{\epsilon}{2^{k+3}}]$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de modo que

$$v(R_k) = 1 \cdot \frac{\epsilon}{2^{k+2}}$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} v(R_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+2}} = \epsilon/2$$

Análogamente, la semi-recta izquierda se puede sumergir en la unión de los rectángulos $Q_k = [-k-1, -k] \times [y_0 - \frac{\epsilon}{2^{k+3}}, y_0 + \frac{\epsilon}{2^{k+3}}]$, y

$$\sum_{k=0}^{\infty} v(Q_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+2}} = \epsilon/2$$

Así pues, la recta entera se puede sumergir en una unión numerable de rectángulos, con suma de los volúmenes menor que ϵ

También en este caso se puede hacer otra demostración sumergiendo A en una unión numerable de rectángulos de volumen cero, escogiendo por ejemplo los rectángulos $R_k = [k, k+1] \times [y_0, y_0]$ y $Q_k = [-k-1, -k] \times [y_0, y_0]$

Definición (Conjuntos de Contenido Cero). *Sea A un conjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que A tiene contenido cero si verifica:*

Para todo $\epsilon > 0$ existe una familia finita de rectángulos cerrados en $\mathbb{R}^n$ $\{R_i\}_{i=1}^k$, tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R_i \quad \textit{y} \quad \sum_{i=1}^{n} v(R_i) < \epsilon$$

Observación:

En la definición pueden sustituirse los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos o semiabiertos.

Los conjuntos de contenido cero son acotados.

Evidentemente, todo conjunto de contenido cero tiene medida cero, pero hay conjuntos de medida cero que no son de contenido cero. Por ejemplo, la recta paralela a uno de los ejes en el plano, no puede tener contenido cero ya que no es acotada, y el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ es de medida cero por ser numerable, pero no es de contenido cero por no ser acotado. Más adelante veremos otros ejemplos.

También es evidente que si A y B son dos subconjuntos con $A \subseteq B$ y B tiene contenido cero, entonces A tiene contenido cero.

Proposición. *Sea A un conjunto compacto. Entonces A tiene medida cero si y sólo si tiene contenido cero.*

Según las observaciones anteriores, sólo hay que demostrar que un conjunto compacto de medida cero tiene contenido cero.

Sea $\epsilon > 0$, y sea $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de rectángulos abiertos tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) < \epsilon$

La familia $\{\mathbb{R}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de A, que es compacto, luego admite un subrecubrimiento finito, $\{R_{i_1}, \ldots, R_{i_k}\}$, de modo que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} R_{i_j}$ y

$$\sum_{j=1}^{k} v(R_{i_j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) < \epsilon$$

así que A tiene contenido cero.

$\square$

Proposición. *1. La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.*

2. La unión finita de conjuntos de contenido cero tiene contenido cero.

Observaciones:

La unión finita de conjuntos de contenido cero tiene contenido cero, y la unión numerable de conjuntos de contenido cero tendrá medida cero, pero puede no tener contenido cero. Como ejemplo podemos poner otra vez el de la recta, que se puede describir como la unión de los segmentos $A_k = [-k, k] \times y_0$; es evidente que cada uno de estos segmentos es un conjunto de contenido cero, y sin embargo la recta no lo es.

Otro ejemplo es el conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, que es numerable, luego es unión numerable de conjuntos de contenido cero formados por un sólo punto cada uno, pero no tiene contenido cero.

La demostración de que no tiene contenido cero se basa en el siguiente resultado:

Proposición. *1) Sea* $[a, b]$ *un intervalo real. Para toda familia finita de rectángulos* $\{R_i\}_{i=1,\dots,k}$ *tal que* $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i$ *se tiene* $b - a \leq \sum_{i=1}^{k} v(R_i)$*. En particular, si* $a < b$*,* $[a, b]$ *no tiene contenido cero.*

2) Sea A *un rectángulo en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\{R_i\}_{i=1,\dots,k}$ *una familia finita de rectángulos tales que* $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i$*. Entonces* $v(A) \leq \sum_{i=1}^{k} v(R_i)$

Como consecuencia, los conjuntos de contenido cero y los de medida cero tienen que tener interior vacío.

El recíproco tampoco es cierto. Hay conjuntos con interior vacío, que no tienen ni contenido cero ni medida cero:

Por ejemplo $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tiene interior vacío, y no tiene contenido cero. Y $B = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ tiene interior vacío y no tiene medida cero.

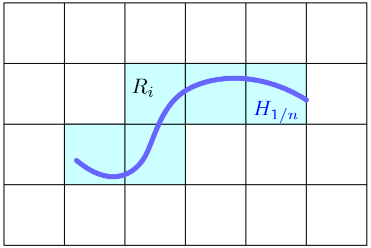
Vamos a ver algunos resultados en los que intervienen de forma fundamental los conjuntos de medida cero:

Proposición. *Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, tal que $f \geq 0$. Entonces $\displaystyle\int_A f = 0$ si y sólo si el conjunto $H = \{x \in A : \ f(x) > 0\}$ tiene medida cero.*

Demostración:

Pongamos $H = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{1/n}$, donde $H_{1/n} = \{x \in A : \ f(x) \geq 1/n\}$, y veamos que cada $H_{1/n}$ tiene contenido cero.

Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, y sea $\epsilon > 0$. Como $\displaystyle\int_A f = 0$, existe P una partición de A tal que $\overline{S}(f,P) < \epsilon/n$. Sean $R_1, \ldots, R_k$ los rectángulos de $\mathfrak{R}_P$ que cortan a $H_{1/n}$.



Se tiene

$$H_{1/n} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i$$

Por otro lado, en cada R_i hay por lo menos un punto de $H_{1/n}$, luego $M_{R_i}(f) \geq 1/n$, luego

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} v(R_i) \leq \sum_{i=1}^{k} M_{R_i}(f)v(R_i) \leq \overline{S}(f,P) \leq \epsilon/n$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{k} v(R_i) \leq \epsilon$$

Así pues, cada $H_{1/n}$ tiene contenido cero, y H que es unión numerable de conjuntos de contenido cero será de medida cero.

Recíprocamente, sea P es una partición de A, y R uno de los rectángulos de $\mathfrak{R}_P$. Como H tiene interior vacío, R tiene puntos que no están en H, donde por tanto la función vale cero, así que $m_R(f) = 0$. En consecuencia, para toda partición P de A se verifica $\underline{S}(f,P) = 0$. Y como f es integrable, se tiene $\int_A f = 0$

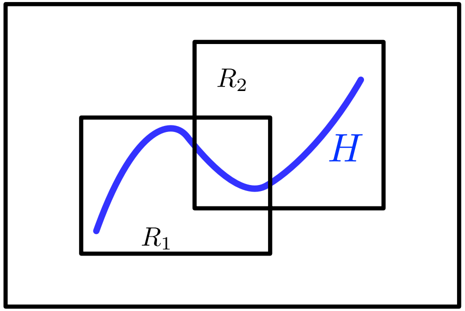
□

Proposición. *Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con $f \geq 0$. Si el conjunto $H = \{x \in A : \; f(x) > 0\}$ tiene contenido cero, entonces f es integrable en A y* $\displaystyle\int_A f = 0$

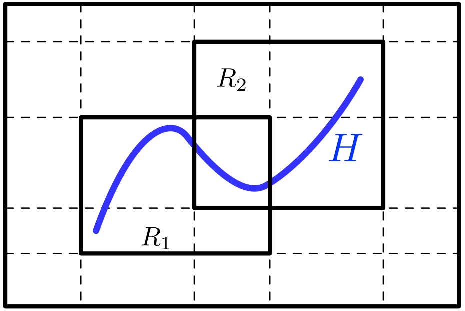
Demostración:

Veamos que f verifica el Criterio de Riemann:

Sea M una cota superior de $|f|$, y sea $\epsilon > 0$. Como H tiene contenido cero, existe una familia finita de rectángulos $R_1, \ldots, R_k$ tales que $H \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} R_i^o$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} v(R_i) < \epsilon/M$



P



Sea P la partición de A definida por los vértices de los rectángulos R_i. Cada rectángulo de

P o bien está contenido en alguno de los R_i, o bien verifica $R \cap R_i^o = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, k$

Si $R \cap R_i^o = \emptyset$ para todo i, entonces $R \cap H = \emptyset$, luego $M_R(f) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P) &= \sum_{R \in \mathfrak{R}_P} M_R(f) v(R) = \sum_{R \in \mathfrak{R}_P, R \subseteq R_i, 1 \leq i \leq k} M_R(f) v(R) \leq \\ &\leq M \sum_{i=1}^{k} v(R_i) \leq M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon\end{aligned}$$

Y como $f \geq 0$, $\underline{S}(f,P) \geq 0$, luego

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq \epsilon$$

por tanto f verifica el Criterio de Riemann, y es integrable en A. Además,

$$0 \leq \int_A f \leq \overline{S}(f,P) \leq \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$, luego tiene que ser $\displaystyle\int_A f = 0$

□

Este resultado no es cierto si H sólo tiene medida cero: en concreto, no se puede deducir de que H tenga medida cero que f sea integrable. Como ejemplo, puede considerarse la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Proposición. *Sea A un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones acotadas, tales que el conjunto $H = \{x \in A : \ f(x) \neq g(x)\}$ tiene contenido cero. Entonces f es integrable en A si y sólo si g es integrable en A, y además* $\int_A f = \int_A g$

Demostración:

Consideremos la función $h = f - g$, y las funciones $h^+ = \max\{h, 0\}$ y $h^- = -\min\{h, 0\}$. $h^+(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, y $h^-(x) \geq 0$ para todo $x \in A$.

Además $\{x \in A : \ h^+(x) > 0\} \subseteq \{x \in A : h(x) \neq 0\} \subseteq H$, luego tiene contenido cero. Por la proposición anterior, h^+ es integrable en A, y $\int_A h^+ = 0$.

Análogamente $\{x \in A : \ h^-(x) > 0\} \subseteq \{x \in A : h(x) \neq 0\} \subseteq H$, luego tiene contenido cero. Por la proposición anterior, h^- es integrable en A, y $\int_A h^- = 0$.

Por tanto $h = h^+ - h^-$ es integrable en A, y $\int_A h = 0$.

Por último, como $f = g + h$ y $g = f - h$, se tiene que f es integrable si y sólo si g lo es, y además $\int_A f = \int_A g + \int_A h = \int_A g$

$\square$