La construcción de la integral de Riemann que hemos estudiado se basa en los rectángulos como dominio de las funciones integrables, por la comodidad de sub-dividirlos mediante particiones. Es evidente que un procedimiento de integración debe abarcar dominios más generales.

La posibilidad de utilizar una clase más amplia de conjuntos, pasa por la posibilidad de utilizar familias de rectángulos para descomponer el conjunto. Esta idea da lugar a la definición de los llamados *Conjuntos Medibles Jordan*, que son conjuntos cuyo área de puede aproximar mediante la construcción de polígonos formados como unión de rectángulos, contenidos en él, o que lo contengan, siguiendo los métodos de cálculo de áreas de los antiguos matemáticos griegos. La definición que damos aquí no es exactamente esa, sino que aprovecha la definición que ya tenemos de las funciones integrables para dar una descripción más rápida de la clase de los conjuntos medibles.

Definición (Función Característica)**.**
Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se llama función característica de M a la función $\chi_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad x \in M \\ 0 & \textit{si} \quad x \notin M \end{cases}$$

Observaciones:

Las funciones características tienen las siguientes propiedades:

1.- $\chi_{\mathbb{R}^n \setminus M} = 1 - \chi_M$
2.- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
3.- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
4.- $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B} = \chi_A(1 - \chi_B)$
5.- $(\chi_M)^2 = \chi_M$
Y además,

Proposición. *Sea M un conjunto en $\mathbb{R}^n$. El conjunto de puntos de discontinuidad de χ_M es la frontera de M.*

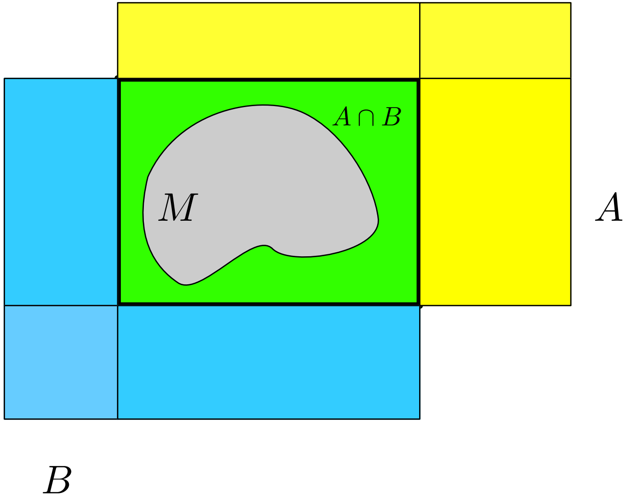
Definición (Conjunto Medible Jordan)**.**
Un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice medible Jordan si es acotado, y su frontera, $Fr(M)$, tiene contenido cero.

Obsérvese que la frontera de un conjunto acotado es un conjunto compacto, así que tiene contenido cero si y sólo si tiene medida cero. Eso nos lleva a la siguiente caracterización, basada en el Teorema de Lebesgue:

Teorema.
Un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible Jordan si y sólo si existe un rectángulo A que lo contiene, tal que χ_M es integrable en A.

Observaciones:

De hecho, si existe un rectángulo A que contiene a M en el que χ_M es integrable, entonces también es integrable en cualquier otro rectángulo que lo contenga, y el valor de la integral es el mismo:



Si consideramos las particiones de A y de B definidas por los vértices de $A \cap B$, P_A y P_B, y aplicamos las propiedades de la integral de Riemann, que ya hemos demostrado,

$$
\begin{aligned}
\int_A \chi_M &= \sum_{R \in \mathfrak{R}_{P_A}} \int_R \chi_M = \\
&= \int_{A\cap B} \chi_M + \sum_{R \in \mathfrak{R}_{P_A}, R \neq A\cap B} \int_R \chi_M = \\
&= \int_{A\cap B} \chi_M = \\
&= \int_{A\cap B} \chi_M + \sum_{R \in \mathfrak{R}_{P_B}, R \neq A\cap B} \int_R \chi_M = \\
&= \sum_{R \in \mathfrak{R}_{P_B}} \int_R \chi_M = \int_B \chi_M
\end{aligned}
$$

ya que en los rectángulos distintos de $A \cap B$ la función χ_M vale cero.

Esto nos permite dar la siguiente definición de volumen de un conjunto, que generaliza el concepto de volumen de un rectángulo como producto de las longitudes de sus lados:

Definición (Volumen)**.**
Sea M un conjunto medible Jordan. Se llama volumen de M a

$$v(M) = \int_A \chi_M$$

donde A es un rectángulo cualquiera que contenga a M.

Observaciones:

1.- Si R es un rectángulo, es medible Jordan, y la definición de volumen como conjunto medible coincide con la definición usual de volumen de un rectángulo.

$$v(R) = \int_R 1$$

2.- Los conjuntos acotados en $\mathbb{R}^n$ cuya frontera se puede describir como una unión finita de gráficas de funciones integrables definidas en rectángulos de $\mathbb{R}^{n-1}$ son medibles Jordan (problemas)

3.- Los conjuntos de medida cero pueden no ser medibles-Jordan, incluso aunque sean acotados: por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ en $\mathbb{R}$, tiene medida cero, ya que es numerable, pero no es medible Jordan, puesto que su frontera es todo el intervalo $[0, 1]$, que no tiene medida cero.

Proposición. *Un conjunto $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es de contenido cero si y sólo si es medible Jordan, y tiene volumen cero*

Demostración:

Supongamos en primer lugar que M tiene contenido cero. En particular M es acotado, ya que tiene que poder sumergirse en una unión finita de rectángulos cerrados. Además también la adherencia de M, $\overline{M}$, tiene contenido cero, y por lo tanto la frontera, que es un subconjunto de la adherencia, también tiene contenido cero. Por tanto M es medible Jordan.

Además si A es un rectángulo que contiene a M, el conjunto de puntos donde la función χ_M es positiva es M, $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \chi_M(x) > 0\}$ y por hipótesis tiene contenido cero, luego χ_M es integrable en A (ya lo sabíamos, por ser M medible Jordan) y la integral vale cero :

$$v(M) = \int_A \chi_M = 0$$

(este resultado se demostró dos capítulos antes, entre las propiedades de los conjuntos de medida cero y de contenido cero)

Recíprocamente, supongamos que M es medible Jordan y que su volumen es cero. Sea A un rectángulo cualquiera que contenga a M. Estamos diciendo entonces que $v(M) = \int_A \chi_M = 0$

Aplicando la definición de la integral como el ínfimo de las sumas superiores de Riemann, dado $\epsilon > 0$ existirá alguna partición P de A tal que la suma superior asociada sea menor que ϵ, $\overline{S}(\chi_M, P) < \epsilon$.

Sean $R_1, \dots R_k$ los rectángulos definidos por esa partición P que cortan a M. Entonces

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R_i$$

Además en cada rectángulo R_i hay algún punto de M, donde la función χ_M vale uno, luego $M_{R_i}(f) = 1$, y por tanto

$$\sum_{i=1}^{k} v(R_i) = \sum_{i=1}^{k} M_{R_i}(f) v(R_i) \leq \overline{S}(\chi_M, P) < \epsilon$$

Luego M tiene contenido cero, como queríamos demostrar.

$\square$

Además, tienen otras propiedades:

Proposición. *Si M es medible-Jordan, también lo son su interior y su adherencia, M^o y $\overline{M}$, y además $v(M^o) = v(M) = v(\overline{M})$. Más aún, si B es un conjunto tal que $M^o \subseteq B \subseteq \overline{M}$, entonces B es medible-Jordan y $v(B) = v(M)$*

Demostración:

Basta lógicamente que demostremos la segunda parte del resultado, ya que la primera es un caso particular, cuando $B = M^o$ o cuando $B = \overline{M}$.

En primer lugar, si M es medible Jordan, en particular es acotado, luego la adherencia $\overline{M}$ también es acotado, y por tanto $B \subseteq \overline{M}$ también es acotado.

Además $M^o \subseteq M^0$ y $\overline{B} \subseteq \overline{M}$, luego

$$Fr(B) = \overline{B} \setminus B^o \subseteq \overline{M} \setminus M^o = Fr(M)$$

así que $Fr(B)$ también tiene contenido cero. Por tanto B es medible Jordan.

Además, las dos funciones características χ_B y χ_M son iguales salvo quizá en puntos de la frontera de M, que es un conjunto de contenido cero, luego las dos tienen misma integral:

$$v(B) = \int_A \chi_B = \int_A \chi_M = v(M)$$

donde A es un rectángulo cualquiera que contenga a $\overline{M}$, y por tanto a M y a B.

$\square$

Obsérvese que en este resultado, los conjuntos B y M se diferencian sólo en puntos de la frontera de M: Si M es medible Jordan, da igual considerar su interior, su adherencia, o poner o quitar alguna parte de su frontera, que seguirá siendo medible Jordan.

Proposición. *a) Sean M y N medibles-Jordan. Entonces los conjuntos $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$, son medibles Jordan, y además*

$$v(M \cup N) = v(M) + v(N) - v(M \cap N)$$

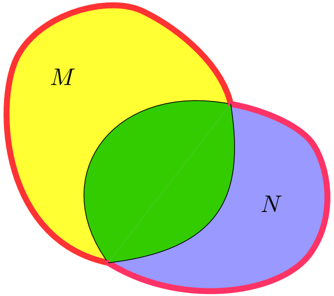
En general, las operaciones conjuntistas unión, intersección y diferencia, con una cantidad finita de conjuntos medibles-Jordan, dan lugar a un conjunto medible-Jordan.

b) Sea M medible-Jordan, y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $x+M$ es medible-Jordan, y $v(x+M) = v(M)$ es decir, el volumen es invariante por traslaciones.

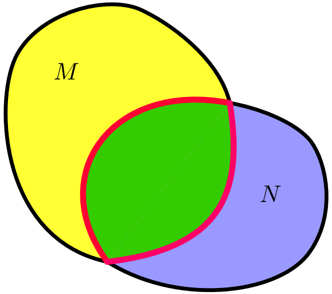
Demostración:

a) Si M y N son medibles Jordan, entonces son acotados, y por tanto $M \cup N$, $M \cap N$ y $M \setminus N$ también son acotados.

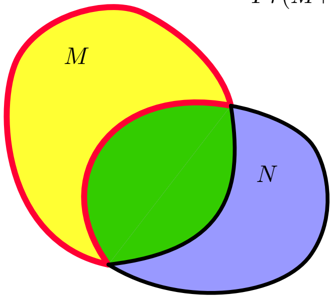
Además las fronteras de los tres conjuntos $M \cup N$, $M \cap N$ y $M \setminus N$ están contenidas en la unión de la frontera de M y la frontera de N, así que todas tienen contenido cero.



$Fr(M \cup N)$



$Fr(M \cap N)$



$Fr(M \setminus N)$

Por tanto los tres conjuntos son medibles Jordan.
Además, por las propiedades de las funciones características, si A es un rectángulo que con-

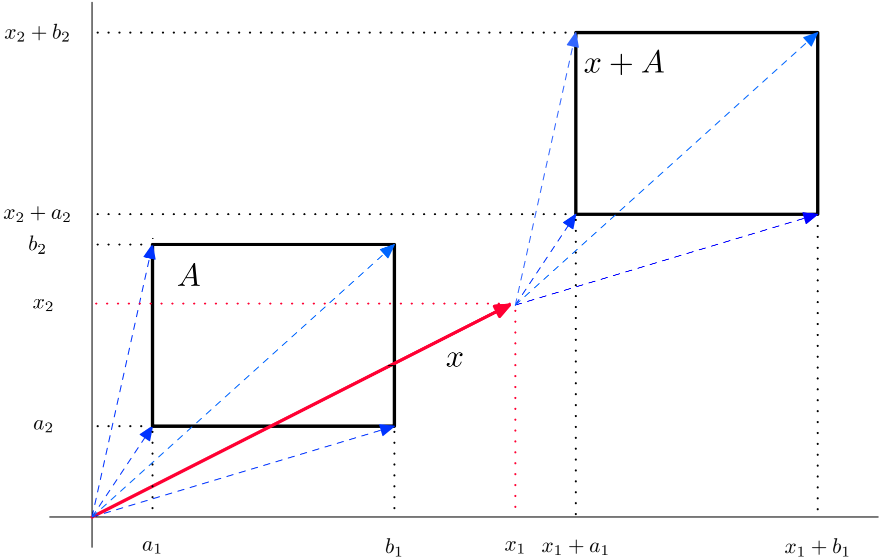
tiene a $M \cup N$, tenemos

$$\begin{aligned} v(M \cup N) &= \int_A \chi_{M\cup N} = \int_A (\chi_M + \chi_N - \chi_{M\cap N} = \\ &= \int_A \chi_M + \int_A \chi_N - \int_A \chi_{M\cap N} = v(M) + v(N) - v(M \cap N) \end{aligned}$$

b) Observemos primero que si A es un rectángulo cualquiera en $\mathbb{R}^n$, $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, y $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un punto, el conjunto $x + A$ es un rectángulo, y $v(x + A) = v(A)$

AAVVR

Conjuntos Medibles Jordan.



$$
\begin{aligned}
x + A &= \{(x + y,\ y \in A\} = \\
&= \{(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),\ y = (y_1 \dots, y_n) \in A\} = \\
&= [x_1 + a_1, x_1 + b_1] \times \cdots \times [x_n + a_n, x_n + b_n]
\end{aligned}
$$

y

$$v(x+A)=\prod_{i=1}^{n}(x_i+b_i-x_i-a_i)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=v(A)$$

Entonces si M es medible Jordan, y A es un rectángulo que contiene a M, $x+A$ contiene a $x+M$, y por tanto $x+M$ es acotado también.

Además, utilizando la descripción de la frontera de un conjunto como el conjunto de puntos de discontinuidad de su función característica,y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\chi_{x+M}(y) &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y\in x+M \\ 0 & \text{si} \quad y\notin x+M \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y-x\in M \\ 0 & \text{si} \quad y-x\notin M \end{cases} = \chi_M(y-x)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} y\in Fr(x+M) &\Leftrightarrow \chi_{x+M} \text{ no es continua en } y \\ &\Leftrightarrow \chi_M \text{ no es continua en } y-x \\ &\Leftrightarrow y-x\in Fr(M)\Leftrightarrow y\in x+Fr(M)\end{aligned}$$

Como $Fr(M)$ tiene contenido cero, dado $\epsilon>0$ existe una familia finita de rectángulos $R_1,\dots R_k$ tales que $Fr(M)\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}R_i$ y la suma de sus volúmenes $\sum_{i=1}^{k}v(R_i)$ es menor que ϵ.

Pero entonces

$$x + Fr(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(x + R_i)$$

unión finita de rectángulos, y la suma de los volúmenes es

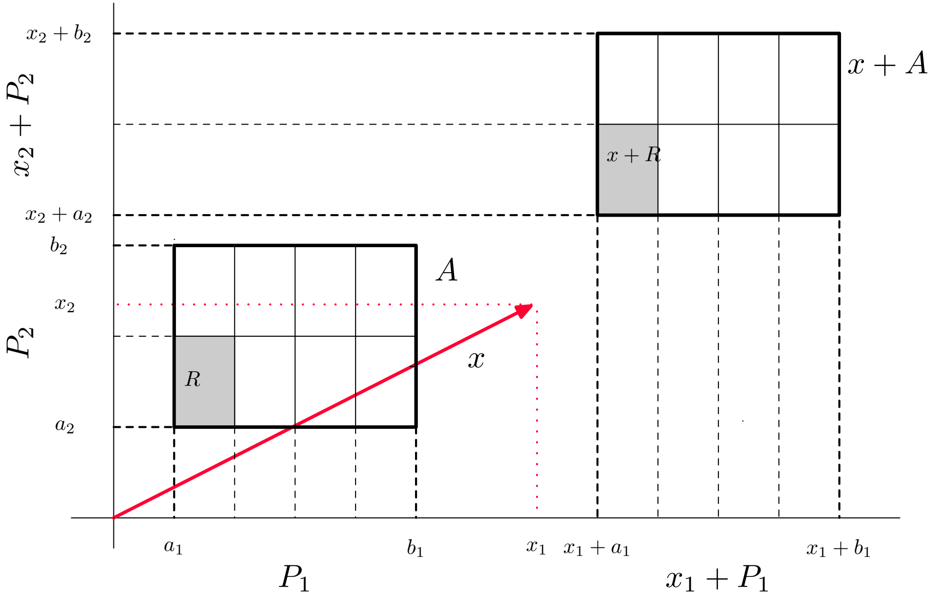
$$\sum_{i=1}^{k} v(x + R_i) = \sum_{i=1}^{k} v(R_i) < \epsilon$$

Luego $Fr(x + M) = x + Fr(M)$ también tiene contenido cero.

Así pues, $x + M$ es medible Jordan. Nos queda por demostrar que ambos conjuntos tienen el mismo volumen.

Ahora bien, escojamos un rectángulo A que contenga a M. Si P es una partición de A, $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$, entonces $x + P = \{x_1 + P_1, \ldots, x_n + P_n\}$ es una partición de $x + A$, (obtenida trasladando cada punto de las particiones de los segmentos $[a_1, b_i]$ sumándoles x_i, la coordenada i-ésima de x). Y los rectángulos definidos por la partición $x + P$ son todos de la forma $x + R$ con R un rectángulo definido por P en A

Conjuntos Medibles Jordan.



Además, si $R \in \mathfrak{R}_P$,

$$\begin{aligned} m_{x+R}(\chi_{x+M}) &= \inf\{\chi_{x+M}(y),\ y \in x+R\} = \\ &= \inf\{\chi_M(y-x),\ y-x \in M\} = m_R(\chi_M) \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} M_{x+R}(\chi_{x+M}) &= \sup\{\chi_{x+M}(y),\ y \in x+R\} = \\ &= \sup\{\chi_M(y-x),\ y-x \in M\} = M_R(\chi_M) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \underline{S}(\chi_M, P) &= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} m_R(\chi_M)v(R) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} m_{x+R}(\chi_{x+M})v(x+R) = \\ &= \underline{S}(\chi_{x+M}, x+P) \le \int_{x+A} \chi_{x+M} \le \overline{S}(\chi_{x+M}, x+P) = \\ &= \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} M_{x+R}(\chi_{x+M})v(x+R) = \sum_{R\in\mathfrak{R}_P} M_R(\chi_M)v(R) = \\ &= \overline{S}(\chi_M, P) \end{aligned}$$

Esta cadena de desigualdades es cierta para cualquier partición P de A. Tomando en la parte izquierda supremos al variar P entre todas las posibles particiones de A, y a la derecha ínfimos, queda

$$v(M) = \int_A \chi_M = \int_{x+A} \chi_{x+M} = v(x+M)$$

Esto termina la demostración.

□

Para terminar este tema, la definición de esta clase de conjuntos nos permite generalizar la construcción de la integral de Riemann a una clase mucho más amplia de conjuntos que los rectángulos con los que hemos trabajado hasta ahora:

Definición (Integral sobre conjuntos medibles-Jordan)**.**
Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada, y* M *un conjunto medible -Jordan. Se dice que* f *es integrable en* M *si el producto* $f \cdot \chi_M$ *es integrable en algún rectángulo* A *que contenga a* M*. En este caso, se llama integral de* f *en* M *a*

$$\int_M f = \int_A f \cdot \chi_M$$

Observaciones:

La definición es correcta, en el sentido de que no depende del rectángulo A que contiene a M.

Además se pueden demostrar fácilmente algunas propiedades, como por ejemplo que si M y N son dos conjuntos medibles Jordan,

$$\int_{M\cup N} f = \int_M f + \int_N f - \int_{M\cap N} f$$

AAVVR

Conjuntos Medibles Jordan.

Contenido

y si M y N son disjuntos, la integral en $M \cup N$ es la suma de las integrales en M y en N. Esta propiedad se llama "aditividad respecto al dominio de integración", y es una de las propiedades fundamentales de la integral, si ha de servir para medir volúmenes de conjuntos.