Las diversas formalizaciones de la integral de Riemann y el problema de caracterizar las funciones integrables sugerían la idea de medir el conjunto de puntos de discontinuidad de una función. Los primeros intentos en esta dirección se deben a Stolz, Harnack y Cantor, y tuvieron lugar en la última quincena del siglo XIX; en concreto Cantor considera conjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$ y define su medida como el ínfimo de los volúmenes de los entornos $V(E, p)$ de E formados por los puntos que distan de E menos que p. Esta primera definición tiene sin embargo graves inconvenientes, como por ejemplo el hecho de no ser aditiva.

Peano y Jordan introducen a partir de la medida de Cantor los conceptos de contenido interior y exterior de un conjunto, llaman medibles a los conjuntos para los que ambos contenidos coinciden, y con esta definición estudian las propiedades de la integral de Riemann que hemos mencionado anteriormente. Para estos conjuntos ahora la medida de Cantor es aditiva, pero se encuentran aún otros problemas, como por ejemplo que un abierto acotado no es necesariamente medible, o que el conjunto de los números racionales de un intervalo real acotado no es tampoco medible.

Borel es el primero en comprender cuáles son los verdaderos problemas que presentan las definiciones anteriores, y el primero también en solucionarlos: basándose en el resultado de Cantor de que un abierto de $\mathbb{R}$ puede descomponerse como la unión numerable de una familia de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, define la medida de un abierto mediante la suma de las longitudes de sus "componentes". Define después una clase de conjuntos más amplia, obtenidos a partir de conjuntos abiertos mediante una cantidad numerable de operaciones de unión y diferencia (que hoy denominamos "borelianos"), y afirma que para esta clase de conjuntos se puede definir una medida que sea completamente aditiva (e.e. la medida de una unión numerable de conjuntos disjuntos es igual a la suma de las medidas de cada uno).

La definición de esta propiedad fué el punto de partida, junto con los trabajos de Baire, de los estudios sobre la clasificación topológica de los conjuntos de puntos, y sirvió también de base para la extensión de la noción de integral a principios del siglo XX debida a Lebesgue.

Lebesgue, preocupado especialmente por el problema de la integración, se plantea la posibilidad de aislar las propiedades que deben caracterizar el comportamiento de la integral, añadiendo a las propiedades de linealidad y monotonía, y a la aditividad respecto al conjunto de integración, la propiedad de conservar los límites para sucesiones crecientes. Analizando estos postulados pasa del problema de definir una integral al problema de definir una medida adecuada en los conjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Pasando del proceso finito de Jordan y Peano a un proceso infinito, y basándose en los resultados de Borel, Lebesgue define la medida exterior $m_e(E)$ de un conjunto E de $\mathbb{R}$ como el ínfimo de las sumas $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ donde (I_n) es una familia numerable de intervalos que contiene a E, y $l(I_n)$ es la longitud usual de los intervalos. Define luego la medida interior de un conjunto acotado $E \subset [a,b]$ por $m_i(E) = (b-a) - m_e([a,b] \setminus E)$, y por último llama conjuntos medibles a aquellos conjuntos E para los que la medida exterior e interior coinciden. Esta definición se extiende a conjuntos no necesariamente acotados por la condición

$$m(I) = m_e(I \cap E) + m_e(I \setminus E)$$

para todo intervalo I. Las definiciones se generalizan a conjuntos de $\mathbb{R}^n$ sin más que cambiar intervalos por rectángulos.

Con estas definiciones, todo conjunto medible en el sentido de Jordan y Peano en $\mathbb{R}$ es también medible en el sentido de Lebesgue, y su medida coincide con su contenido. Además, los abiertos son medibles, y la medida de Borel sobre los abiertos coincide también con la de Lebesgue. Se demuestra que la medida así definida es completamente aditiva, como había postulado Borel, es monótona y no negativa. Pero además se verifica que todo conjunto de medida exterior nula es medible; esta última propiedad es la diferencia fundamental entre la medida de Lebesgue y la definida por Borel, y recibe el nombre de propiedad de completitud.

Una vez definidos los conjuntos medibles se puede extender de forma inmediata la formulación de Jordan de la integral de Riemann, definiendo las sumas superiores e inferiores sin más que sustituir los rectángulos, o los conjuntos medibles en sentido de Jordan, por los conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Sin embargo Lebesgue no sigue este camino, sino que parte de la interpretación geométrica de la integral de funciones positivas como el área encerrada bajo la función, y aproxima este conjunto sub-dividiendo el rango de la función en vez de su dominio: si f está definida en $[a, b]$, y $0 \leq m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, considera una partición del intervalo $[m, M]$, $m \leq a_1 < \ldots < a_n \leq M$, y considera en $[a, b]$ los conjuntos E_i de los puntos tales que $a_i \leq f(x) \leq a_{i+1}$. f es integrable si los límites al tomar las particiones cada vez más finas de las sumas $\sum_{i=1}^{n-1} a_i m(E_i)$ y $\sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} m(E_i)$ coinciden. En este caso, el límite común es la medida del conjunto $E = \{(x, y),\ x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, y es el valor de la integral de f.

Para que el razonamiento anterior sea válido, los conjuntos E_i deben ser medibles. Lebesgue define las funciones medibles como aquellas cuya inversa transforma conjuntos abiertos en conjuntos medibles. La definición de integral tiene entonces sentido para las funciones medibles. Uno de los resultados más interesantes que se obtienen a continuación, inspirado en los trabajos de Baire sobre las clases de funciones estables por límites puntuales, es el hecho de que el límite puntual de una sucesión de funciones medibles es siempre medible. En particular el célebre ejemplo de Dirichlet es una función medible en el sentido de Lebesgue.

Queda por probar ahora que el límite de funciones integrables sea integrable. Para la integral de Riemann se tenían ya algunos resultados para sucesiones de funciones uniformemente convergentes, y hacia 1885 Arzelá había demostrado que la integración término a término era posible para una sucesión uniformemente acotada de funciones imponiendo alguna condición de continuidad o integrabilidad de la función límite. Lebesgue prueba para su integral, con gran facilidad, un teorema más general, en el que se establece que el límite puntual de una sucesión de funciones medibles y uniformemente acotadas definidas en un conjunto medible es también integrable, y además su integral es el límite de las integrales de los términos de la sucesión. Este es el principio para otros teoremas de convergencia que caracterizan el triunfo de la integral de Lebesgue.

Además de los problemas de convergencia, que venían arrastrándose desde el estudio de las series trigonométricas que habían sido el origen del desarrollo de la teoría de integración debido a Cauchy, Lebesgue estaba especialmente interesado en resolver otro problema que había aparecido junto con la integral de Riemann: el Teorema Fundamental del Cálculo. Con la integral de Cauchy para funciones continuas se había establecido la relación entre derivación e integración mediante las fórmulas

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Estos resultados perdieron generalidad con la integral de Riemann, cuando se vio, por ejemplo, que existían funciones con derivada acotada pero no integrable, con lo que la primera fórmula ya no era cierta para cualquier función diferenciable. Análogamente, la segunda igualdad sólo se verifica en los puntos de continuidad y no en todos los puntos del dominio de una función integrable.

Utilizando los teoremas de convergencia, Lebesgue prueba que el teorema fundamental del cálculo (la primera igualdad) sigue siendo válida, para la integral de Lebesgue, al menos si la derivada es acotada. Pero además, partiendo de la idea geométrica de dividir el rango de la función en vez de su dominio, aunque con bastante más dificultad, consigue demostrar que el resultado es también cierto si la derivada es una función de variación acotada.

Y mediante un análisis mucho más sutil demuestra también que si f es integrable (en su sentido), la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ tiene en casi todo punto una derivada igual a $f(x)$.

Otro de los avances esenciales de la teoría de Lebesgue se refiere a las integrales múltiples de funciones de varias variables. No era difícil justificar el método de las integrales iteradas para funciones continuas en recintos de integración sencillos, como rectángulos, o regiones limitadas por curvas analíticas, utilizando la definición de las sumas de Riemann, pero las dificultades surgen inmediatamente al abordar casos más generales. La solución definitiva se debe a Fubini, que estableció el teorema en el marco de la integral de Lebesgue en 1907.

Lebesgue extiende después sus resultados sobre derivación de integrales a integrales múltiples. Define una función de conjunto que generaliza la integral indefinida mediante la ecuación $F(E) = \int_E f(x)dx$, donde f es una función integrable sobre cada conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$; esta función es completamente aditiva y absolutamente continua. Una buena parte del trabajo de Lebesgue se dedica la demostración del recíproco de este resultado.

A partir de aquí, y de la construcción de la integral de Stieltjes, Radon construye una nueva definición de integral, con el método de Lebesgue pero sustituyendo la medida por una función de conjunto completamente aditiva en $\mathbb{R}^n$. Fréchet extiende luego esta construcción a la integral sobre un conjunto cualquiera en lugar de $\mathbb{R}^n$. Los desarrollos posteriores más importantes de esta teoría se deben a Daniell, que introduce el producto infinito de medidas, y Bochner que define la integral de una función con valores en un espacio de Banach en 1933, y anuncia el estudio más general de la integral débil que desarrollarán Gelfand, Dunford y Pettis.

Volviendo ahora la vista atrás, hay que decir que para Lebesgue el problema principal era el de la integral y sus propiedades, y elaboró para ello la teoría de la medida como una herramienta de gran precisión. Durante mucho tiempo la teoría de Lebesgue se consideró un trabajo apropiado sólo para los problema que exigían la mayor abstracción. La popularización de la teoría se debe especialmente a Carathéodory, que, por el contrario, pone el mayor énfasis en la teoría de la medida. Desde entonces la teoría de la integración se ha dividido entre ambas tendencias, basada una en el desarrollo cada vez más abstracto y axiomático de la medida, y la otra basada en los métodos y técnicas funcionales, con el tipo de desarrollo que llevó de la integral de Cauchy a la de Lebesgue.

Actualmente hay distintas formas de abordar la teoría incluso en el marco sencillo de funciones definidas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ que consideramos en este curso. Una de ellas consiste en "completar" el espacio de las funciones integrables en el sentido de Riemann con los límites puntuales de las sucesiones de funciones integrables. En este proceso se puede partir incluso del espacio de funciones continuas, con la norma de la integral $\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$.

Otro método empieza por construir la integral de Lebesgue definiendo la integral de una función positiva a partir de la medida del conjunto de ordenadas debajo de la gráfica de la función.

En este programa pretendemos destacar sobre todo las propiedades de la integral de Lebesgue en cuanto al manejo de las funciones integrables. En especial pondremos el mayor énfasis en los teoremas de convergencia. Este criterio es una razón para apartarnos de la construcción original de Lebesgue, para acercarnos a ella a partir de las propiedades de las funciones medibles. Una vez definida la medida de Lebesgue y los conjuntos medibles, definimos la integral de las funciones simples, y a partir de éstas definimos la integral de funciones medibles positivas mediante un límite de integrales de funciones simples. Por último extendemos la definición a funciones medibles cualesquiera.