2.1. Construir ejemplos en $\mathbb{R}^2$ que verifiquen las dos propiedades correspondientes a cada celda de la siguiente tabla, o poner una x si no es posible:

	contenido cero	no contenido cero	medida cero	no medida cero
finito				
numerable				
no numerable				
acotado				
no acotado				
interior vacío				
interior no vacío				

2.2. En cada una de las siguientes afirmaciones, estudiar si alguna de las dos implicaciones es cierta, y poner contraejemplos de las que sean falsas.
1) A tiene medida cero $\Longleftrightarrow$ A^0 tiene medida cero
2) A tiene medida cero $\Longleftrightarrow$ $Fr(A)$ tiene medida cero
3) A tiene medida cero $\Longleftrightarrow$ A^0 es vacío
4) A tiene medida cero $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ tiene medida cero

2.3. En cada una de las siguientes afirmaciones, estudiar si alguna de las dos implicaciones es cierta, y poner contraejemplos de las que sean falsas.
1) A tiene contenido cero $\Longleftrightarrow$ A^0 tiene contenido cero
2) A tiene contenido cero $\Longleftrightarrow$ $Fr(A)$ tiene contenido cero
3) A tiene contenido cero $\Longleftrightarrow$ A^0 es vacío
4) A tiene contenido cero $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}$ tiene contenido cero

2.4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo cerrado y acotado, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable – Riemann. Probar que la gráfica de f, $G_f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A,\ t = f(x)\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ de contenido cero.

2.5. a) Utilizando el TEOREMA DE LEBESGUE, demostrar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones integrables, entonces $f + g$ y fg son integrables.
b) ¿Es cierto que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $1/f$ es integrable?. Poner un ejemplo.

2.6. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 \, dydx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x}^{\sqrt{x}} (y + y^3) \, dydx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} \, dydx$ d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_{\operatorname{sen} x}^{3 \operatorname{sen} x} x(1 + y) \, dydx$

2.7. a) Calcular $I = \displaystyle\iint \frac{d(x,y)}{\sqrt{x+y+1}}$ en el cuadrado de vértices $(0,0); (0,1); (1,0); (1,1)$.
b) Calcular $I = \displaystyle\iint \sqrt{4x^2 - y^2}\, d(x,y)$ en la región limitada por las rectas $x = 1$, $y = 0$ e $y = x$.
c) Calcular $\displaystyle\iint xe^{-x^2/y} d(x,y)$ en el recinto limitado por $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ e $y = x^2$.

d) Hallar $I = \int\int y d(x,y)$ en el recinto del semiplano $y > 0$, limitado por $x^2 + y^2 = a^2$,$y^2 = 2ax$, y $x = 0$.

2.8. a) Dibujar el conjunto A y escribir los límites de integración en los dos órdenes en la integral $\int_A f(x,y)d(x,y)$, donde

$$A = \left\{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \min\{x, \sqrt{1-x^2}\}\right\}$$

b) Dada la integral

$$\int_0^1 \int_0^{3-x} \int_0^1 f(x,y,z)dz\ dy\ dx$$

dibujar el conjunto de integración, y cambiar el orden de integración para obtener una integral de la forma

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? f(x,y,z)dx\ dy\ dz$$

2.9. a) Expresar como integrales dobles (dibujando el dominio de integración), y como integrales iteradas en orden inverso:

a) $\displaystyle\int_{-6}^{2} \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx\,dy$ b) $\displaystyle\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy\,dx$

b) Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{-(y-4)/2} f(x,y)dxdy$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\min\{1,\log(1/y)\}} f(x,y)dx\,dy$

2.10. Sean $\{p_1, p_2 \ldots\}$ la sucesión de los números primos, y definamos

$$P_k = \{(\frac{m}{p_k}, \frac{n}{p_k});\ m,n = 1,\ldots,(p_k - 1)\}$$

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

a) Demostrar que P es denso en $A = [0,1] \times [0,1]$, pero cualquier linea paralela a uno de los ejes en A contiene sólo una cantidad finita de puntos de P.
b) Definamos

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in P \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin P \end{cases}$$

Probar que $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx$ y $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$ existen y ambas valen 0, y sin embargo f no es integrable en A.