6.1. Estudiar porqué es medible el conjunto

$$A = \{(x, y),\ |x - y| < e^{-x},\ x > 0\}$$

Estudiar para qué valores de a la función $f(x, y) = e^{ax}$ es integrable en el conjunto A.

6.2. a) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{n + \operatorname{sen}^n x}{n + nx^2} dx$

b) Calcular $\displaystyle\lim_n \int_1^\infty \frac{ne^{-nx}}{1 + x^2}\, dx$, justificando las técnicas utilizadas.

c) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int\int_E \frac{\operatorname{sen}^n(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + 1)^n} d(x, y)$, donde $E = [0, \infty) \times [0, \infty)$

6.3. Comprobar que en los siguientes casos se tiene $\displaystyle\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n$. Comprobar que las sucesiones $\{f_n\}$ no cumplen las condiciones de los teoremas de convergencia.

a) $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$ b) $g_n(x) = \dfrac{n}{n^2 + x^2}$

c) $h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{n^2} & \text{si } 0 \le x \le n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

6.4. Se define la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_n(x) = \dfrac{nx \operatorname{sen} x}{1 + n^2x^2}$. a) Comprobar si se verifican las condiciones de los teoremas de convergencia

(Sugerencia: para la monotonía comprobar que basta considerar la sucesión $h_n(x) = \dfrac{n}{1 + n^2x^2}$)

b) Deducir que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx \operatorname{sen} x}{1 + n^2x^2} dx = 0$

6.5. Utilizando los teoremas de convergencia, probar:

(a) $\displaystyle\lim_n \int_0^1 \frac{n \operatorname{sen}(x^2/n)}{x^2} dx = 1$

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n + 1)}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln(\frac{1}{1 - x}) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^n dx = 1$

(d) $\displaystyle\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n+1} e^{2x^2} dx = \frac{e - 1}{2}$

6.6. a) Sea $g(x) = e^{-x/2}$. Demostrar que es integrable-Lebesgue en $[0, \infty)$, y calcular $\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx$

b) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(\frac{n + x}{n + 2x}\right)^n e^{-x/2}\, dx$$

6.7. a) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x + n}{x^3 + n} dx$$

b) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{x + n}{x^3 + n} dx$$

6.8. Comprobar que la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{\sqrt{x}}$ es integrable en $E = (0, \infty)$. Utilizarlo para calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^{2n}(1/x)}{\sqrt[2n]{x}}$$

6.9. Dada la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$, se pide:

a) Comprobar si se verifican las hipótesis del Teorema de Convergencia Monótona.

b) Comprobar si se verifican las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada.

c) Calcular $\lim_n \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$

6.10. a) Comprobar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } \; 0 < x^2+y^2 \le 1 \\ \frac{2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } \; x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Calcular su integral.

b) Utilizar (a) para calcular $\lim_n \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f_n(x,y)$, donde

$$f_n(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n}{x^2+y^2})}{n^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

6.11. Consideremos la sucesión de funciones $f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx^2}}$

a) i) Comprobar que en $E = [1,\infty)$ cada f_n es integrable, y se tiene $\lim_n \displaystyle\int_1^\infty f_n(x)dx = \int_1^\infty \lim_n f_n(x)dx$

ii) Estudiar si $\{f_n\}_n$ cumple las condiciones de alguno de los teoremas de convergencia en $E = [1,\infty)$.
(sug: para la monotonía, considerar la función $g(y) = \dfrac{yx}{e^{yx^2}}$ con $x \in E$ fijo)

b) i) Comprobar que en $E = [0,1]$ cada f_n es integrable, pero $\lim_n \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_n f_n(x)dx$

ii) Comprobar que $\{f_n\}_n$ no cumple las condiciones de ninguno de los teoremas de convergencia en $E = [0,1]$ (sug: para la convergencia dominada, considerar los intervalos $[(n+1)^{-1/2}, n^{-1/2}]$)