

8.1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y monótona creciente. Parametrizar la superficie de revolución obtenida al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje vertical.

8.2. Parametrizar las siguientes superficies:

- La parte del plano $z=3+x$ que esta dentro de $x^2 + y^2 = 1$.
- Un toro: superficie que se obtiene al rotar una circunferencia de radio r alrededor de un eje situado a una distancia R ($R > r$) del centro en el mismo plano de la circunferencia.
- La porción de superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ay$ limitada por la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio a .

8.3. a) Calcular el área del helicoide definido por la función $\phi : [0, 1] \times [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$.

b) Calcular el área de la región del plano $x + y + z = a$ determinada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

c) Calcular el área de la porción de superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ situada por encima del plano xy , y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$

8.4. Calcular $\int_S xy dS$, donde S es el tetraedro de caras $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$

8.5. a) Si S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, orientada con respecto a la normal exterior, calcular la integral de superficie $\iint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + x^2 dx \wedge dy$

b) El cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ recorta una porción de superficie S en la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$. Calcular la integral de superficie $\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS$

8.6. Transformar la integral de superficie $\iint_S \text{rot } F dS$ en una integral de línea, y calcularla en cada uno de los casos siguientes:

a) $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, x^2 + z^4)$, $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1\}$, y $S^+ = S_1 \cup S_2$, con la normal exterior.

b) $F(x, y, z) = (xz, -y, x^2y)$, donde S consta de las tres caras no situadas en el plano xz del tetraedro limitado por los tres planos coordenados y el plano $3x + y + 3z = 6$, y con el vector normal orientado hacia el exterior del tetraedro.

8.7. Utilizar el teorema de Stokes para calcular las integrales $\int_{C^+} F$

a) $F(x, y, z) = (0, -x, 2x + 3y + z^5)$ y C^+ la intersección de $x + y + z = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$ orientada de $(1, 0, -1)$ a $(0, 1, -1)$ y $(-1, 0, 1)$

b) $F(x, y, z) = (0, 0, xy)$ y C^+ la intersección de $z = y$ con $x^2 - x + y^2 = 0$ Orientada de $(1, 0, 0)$ a $(1/2, 1/2, 1/2)$ y $(0, 0, 0)$

8.8. Sobre un patio en forma de cardioide ($0 \leq r \leq a(1 + \cos \theta)$) se construye una cubierta, levantando para cada punto P del borde un cuadrado de lado el segmento OP que une P con el origen de coordenadas, perpendicular al plano horizontal.

a) Calcular el área de la superficie lateral de la cubierta.

c) Si S_0 es la superficie superior de la cubierta, calcular $\int_{b(S_0)^+} F(x, y, z)$, donde la superficie se orienta de modo que el vector normal apunte hacia arriba, y $F(x, y, z) = (-2xy - 2xz + y + z, -x^2, y - x^2 + z^2)$

8.9. Sea D el conjunto representado en el plano.

a) Calcular $\int_{Fr(D)^+} (x+y)^2 dx + (x-y)^2 dy$ donde $Fr(D)^+$ se orienta de modo que la región D quede a la izquierda.

b) Si V es el cuerpo de revolución que se obtiene al girar D alrededor del eje vertical, calcular $\int_{Fr(V)^+} G(x, y, z)$, donde $Fr(V)^+$ se orienta hacia el exterior de V , y

$$G(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz, -(x + y + z)^2 - y^2z, (2 + y + z)^2 + 2x^2)$$

