Problemas del curso

9.1. Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Probar la siguiente desigualdad de Cauchy-Schwartz.

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

9.2. Sea $A \subset [0,1]$, tal que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, de manera que cada número racional de $(0,1)$ está contenido en algún intervalo (a_i, b_i).
i) Probar que la frontera de A es $\partial A = [0,1] \setminus A$.
ii) Si $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < 1$, probar que ∂A no tiene medida nula.
iii) En las condiciones de (ii), probar que $f = \chi_A$ no es integrable – Riemann en $[0,1]$

9.3. a) Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ NO medible-Jordan, y B un conjunto de contenido cero. Probar que $A \cup B$ no es medible-Jordan. (Sug: utilizar las funciones características)
b) Si A es acotado pero NO es medible-Jordan, y B es medible Jordan, ¿puede ser $A \cup B$ medible-Jordan?. ¿Y si B es acotado pero tampoco es medible-Jordan?

9.4. Sean $\{p_1, p_2 \ldots\}$ la sucesión de los números primos, y definamos

$$P_k = \{(\frac{m}{p_k}, \frac{n}{p_k});\ m, n = 1, \ldots, (p_k - 1)\}$$

$$P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$$

a) Demostrar que P es denso en $A = [0,1] \times [0,1]$, pero cualquier linea paralela a uno de los ejes en A contiene sólo una cantidad finita de puntos de P.
b) Definamos

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (x,y) \in P \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin P \end{cases}$$

Probar que $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx$ y $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$ existen y ambas valen 0, y sin embargo f no es integrable en A.

9.5. Escribir una expresión que permita calcular mediante el uso de integrales el volumen de la unión de una esfera de radio R centrada en el origen de coordenadas y un cilindro de radio $R/4$ y altura $2R$ centrado en el punto $(0, 3R/4, 0)$ y paralelo al eje vertical.

9.6. Sea D la región del plano limitada por las condiciones $0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1$, y sea $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función $H(u,v) = (u+v, u-v)$

1. Comprobar que H verifica las hipótesis del teorema de Cambio de Variable

2. Expresar la siguiente integral, después de hacer el cambio de variable $(x,y) = H(u,v)$

$$\int_D x^2 - y^2 d(x,y)$$

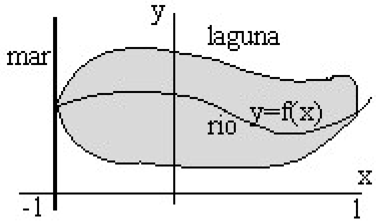
3. Calcular la integral

(Sugerencias: Un dibujo puede ser útil)

9.7. Calcular

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{e^{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

9.8. Un rio sigue un recorrido en su último tramo hasta el mar $y = f(x)$. Cuando sube la marea, el rio se ensancha formando una laguna, que se estrecha en la desembocadura. En cada punto (x, y) de la laguna, la profundidad viene dada por $p(x, y) = 40 - 160(y - f(x))^2 - 40x^2$ metros. La forma de la laguna queda descrita por la condición $p(x, y) \geq 0$. Calcular el volumen de agua en la laguna.



9.9. Sea A un conjunto cualquiera en $\mathbb{R}^n$. Probar que existe un conjunto medible–Lebesgue E, $E \supseteq A$, con $m(E) = m^*(A)$

9.10. Demostrar el siguiente criterio de comparación para la integral de Lebesgue:
Sean f y g dos funciones medibles y no negativas en un intervalo semiabierto $(a, b]$, integrables en cada sub-intervalo acotado $[c, b]$, $a < c \leq b$, y supongamos que

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

a) Si $L \neq 0$, entonces f es integrable en (a, b) si y sólo si g lo es.
b) Si $L = 0$, entonces si g es integrable en $(a, b]$, f también lo es, y si f no es integrable, g tampoco.

9.11. a) Comprobar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ \frac{2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}^2$. Calcular su integral.
b) Utilizar (a) para calcular $\lim_n \int_{\mathbb{R}^2} f_n(x, y)$, donde

$$f_n(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n}{x^2+y^2})}{n^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

9.12. Se considera la sucesión de funciones $f_n(x) = \operatorname{sen}^2(nx)$ si $x \in [0, 2\pi/n]$, y cero en el resto
a) Comprobar que $\int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x)dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$

b) Comprobar si se verifican las condiciones de alguno de los teoremas de convergencia.
c) Se considera ahora la sucesión de funciones $g_n(x) = nf_n(x)$

Comprobar que $\int_{\mathbb{R}} \lim_n g_n(x)dx \neq \lim_n \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx$.

d) Comprobar que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no verifica las hipótesis de ninguno de los dos teoremas de convergencia. (Sug. para la convergencia dominada, considerar las funciones g_{2^k} en los intervalos $[\pi/2^k, \pi/2^{k-1}]$)

9.13. Sea S una superficie regular y simple en $\mathbb{R}^3$, y $\Gamma : T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S, $\Gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.
Sea C una curva regular y simple contenida en T, y $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de C, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$.
Describir una fórmula para calcular la longitud de la curva $\Gamma(C)$ contenida en la superficie

9.14. Dado un campo vectorial $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ en $\mathbb{R}^2$, de la forma

$$f_1(x, y) = [xf(x) + g(x)]y^2 + 3x^2y \quad f_2(x, y) = yf(x) + g(x)$$

donde f y g son funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}$
a) ¿qué ecuaciones deben cumplir f y g para que $\int_C F(x, y)$ sea 0 a lo largo de cualquier curva cerrada?
b) suponiendo que f es un polinomio de segundo grado, y que $g(0) = 0$, determinar f y g.
c) encontrar una función potencial del campo F.

9.15. a) Calcular el área de la región del plano $x+y+z = a$ determinada por el cilindro $x^2+y^2 = a^2$.
b) Calcular el área de la porción de superficie $z^2 = 2xy$ que se proyecta en el primer cuadrante del plano xy, y limitada por los planos $x = 2$ e $y = 1$
c) Calcular el área de la porción de superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ situada por encima del plano xy, y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$