OCW Universidad de Cantabria
Curso 2012/13
Cálculo Simbólico y Numérico en ED

Hoja 10 - Problemas de contorno: aproximaciones numéricas. Complemento sobre pequeños parámetros en las ED

1. Utilizar el método del tiro (con $ode45$) para encontrar la solución aproximada del problema de contorno:
$$y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$
Utilizar *dsolve* para demostrar que el problema tiene solución única. Programar una función Matlab que resuelva el problema por diferencias finitas.

2. Utilizar los métodos de tiro y en diferencias finitas, para aproximar la solución de los problemas de contorno
$$\begin{cases} y'' = -(3x + x^2)e^x & , \quad x \in (0,1) \\ \qquad y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - y = x^2 & , \quad x \in (0,1) \\ \quad y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0. \end{cases}$$
Comparar solución exacta y soluciones aproximadas, para distintos tamaños de paso h

3. Utilizar la función Matlab $bvp4c$ para resolver los problemas de contorno de los dos ejercicios anteriores y comparar soluciones obtenidas con distintos mtodos (de tiro, diferencias finitas ($ffinitge$) y elementos finitos ($elementosfinitos$). Utilizar $bvp4c$ para aproximar en [0,1] el problema de contorno
$$y'' + x^3 y^2 + y' - 1 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

4. Programar una función Matlab que resuelva mediante diferencias finitas los problemas de contorno
$$p(x)y'' + q(x)y' + h(x)y = r(x), \quad x \in (a,b), \qquad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$
y
$$p(x)y'' + q(x)y' + h(x)y = r(x), \quad x \in (a,b), \qquad y'(a) = 0, \quad y(b) = 0$$
supuesto que admitan solución única. En particular, tomar las funciones p, q y h constantes.

5. Utilizar el método en diferencias finitas o de elementos finitos para encontrar la aproximación de la solución del problema de contorno
$$\varepsilon y'' + y = f(x)\,, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$
para distintas funciones $f(x)$ y valores de ε pequeños ($\varepsilon \to 0$). Comparar con la solución exacta cuando se pueda.

6. Utilizar el método en diferencias finitas o de elementos finitos para encontrar la aproximación de los valores propios y funciones propias del problema:

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

En particular, con diferencias finitas se proponen los siguientes pasos:

a). Considerando los nodos $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n+1$, encontrar los valores propios del esquema discreto $A_h u = \lambda u$, con A_h es la matriz $h^{-2}A$ con A una matriz tridiagonal $n \times n$ con elementos en la diagonal principal 2 y en las sudiagonales -1. Comprobar que, para cada valor de h, los valores propios de A_h coinciden con $\lambda_{hk} = (2 - 2\cos(kh\pi))h^{-2}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, y los vectores propios correspondientes son:

$$u_{hk} = (\sin(kh\pi), \sin(2kh\pi), \cdots, \sin(nkh\pi))^t\,, \quad k = 1, 2, \cdots, n\,.$$

Así, la aproximación de los valores propios y funciones propias del problema de contorno está dada por

$$\lambda_{hk} = \frac{(2 - 2\cos(kh\pi))}{h^2}, \quad y_{hk} = \sin(k\pi x),\ x = (0, x_1, x_2, ..x_n, 1)$$

b). Comparar la solución exacta del esquema discreto con la obtenida numéricamente, para distintos tamaños del paso h. Comparar ambas soluciones con la obtenida analíticamente del problema de contorno: esto es, con los valores propios $\lambda_k = k^2\pi^2$ y las correspondientes funciones propias $\sin(k\pi x)$, $k = 1, 2, 3\cdots$.

7. Repetir el ejercicio anterior para el problema

$$\varepsilon y'' + \lambda y = 0\,, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

tomando valores de ε pequeños.

8. Utilizar el método en diferencias finitas para encontrar una aproximación numérica de los valores propios y funciones propias del problema:

$$\varepsilon y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (-1,0),$$

$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1),$$

$$y(0^-) = y(0^+)\,, \quad \varepsilon y'(0^-) = y'(0^+)\,,$$

$$y(0) = 0\,,\, y(1) = 0.$$

El problema de contorno palanteado nos proporciona las frecuencias propias y los modos propios de vibración del modelo matemático para las vibraciones de una cuerda formada por dos tramos con distintas rigideces: 1 y ε respectivamente. Dar distintos valores a ε y resolver numéricamente el problema haciendo una gráfica de la aproximación numérica de los modos propios de vibración. En particular, hacer ε pequeño y observar como varían los valores propios y las funciones propias en términos de ε.