Cálculo Simbólico y Numérico en ED: sobre campos de direcciones

Mª Eugenia Pérez Martínez
meperez@unican.es

ETSI Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Cantabria

Curso 2012–2013

Dibujando campos de direcciones asociados a ecuaciones diferenciales de primer orden: a mano, y con el entorno dfield

http://math.rice.edu/∽dfield/

http://personales.unican.es/meperez/

Interpretación geométrica de $y' = f(x,y)$

La ecuación diferencial define **un campo de direcciones** en el dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ donde $f(x,y)$ o $\dfrac{1}{f(x,y)}$ estén definidas:

$$(x,y) \longrightarrow \text{ dirección de la recta de pendiente } f(x,y)$$

$$\text{dirección del vector } (1, f(x,y)) \text{ ó } \left(\frac{1}{f(x,y)}, 1\right).$$

En los puntos / f y $\dfrac{1}{f}$ estan definidas ambas direcciones coinciden.

Bosquejo de curvas solución: en cada punto son tangentes al vector del campo.

Curva isoclina para la pendiente k

$$\{(x,y)/f(x,y) = k\}$$

puntos del plano en los que las soluciones tienen pendiente k.
Dirección del campo $\equiv$ Dirección del vector $(1,k)$

Isoclinas para las pendientes $k = 0$ y $k = \infty$ $\longrightarrow$ posibles cambios en el crecimiento de las soluciones

Otras definiciones/consideraciones de tipo geométrico

Si $\phi(x, y, c) = 0$ familia de curvas solución de $y' = f(x, y)$, la **familia de curvas ortogonales** son curvas solución de $y' = -\dfrac{1}{f(x, y)}$.

Ecuaciones de familias de curvas que se cortan con un ángulo ω:

$$F(x, y, y') = 0 \longrightarrow F(x, y, \frac{y' - \tan\omega}{1 + y'\tan\omega}) = 0 \quad (F(x, y, \frac{y' + \tan\omega}{1 - y'\tan\omega}) = 0)$$

Una curva γ es **curva envolvente** de una familia de curvas $\phi(x, y, c) = 0$ cuando

1. en cada punto de γ hay una curva de la familia tangente a ella
2. en cada trozo de curva γ hay infinitas curvas de la familia tangentes a γ.

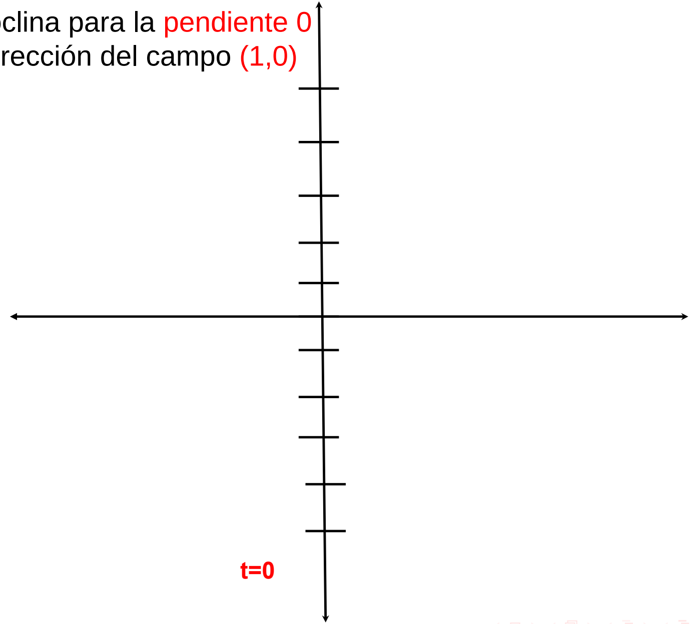
$$\gamma : \qquad \phi(x, y, c) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial c}(x, y, c) = 0 \quad (\longrightarrow \text{ eliminar } c)$$

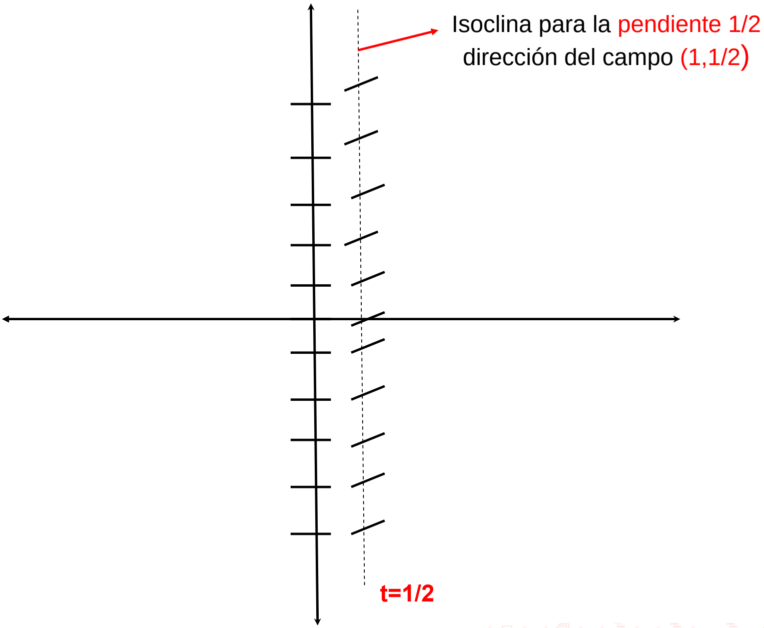
Dibujando un campo de direcciones a mano

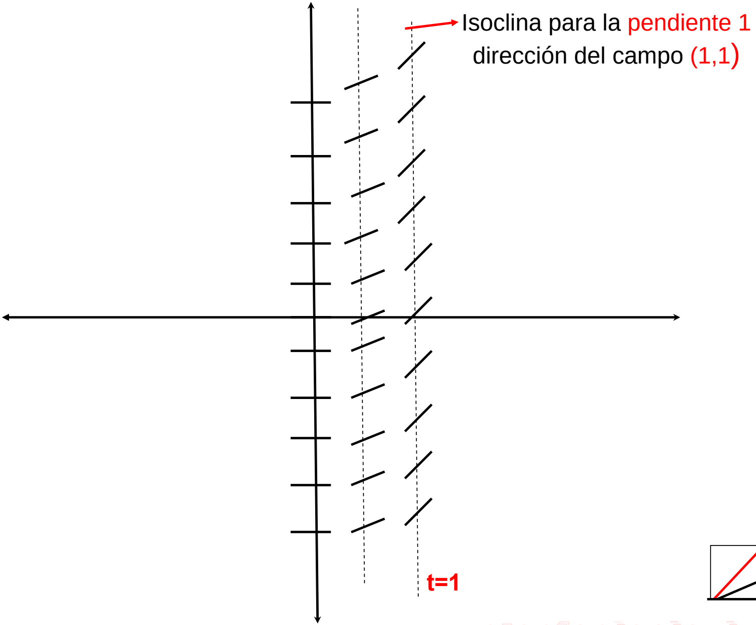
Ecuación diferencial $y'=t$

Solución general: $y=t^2/2+c$

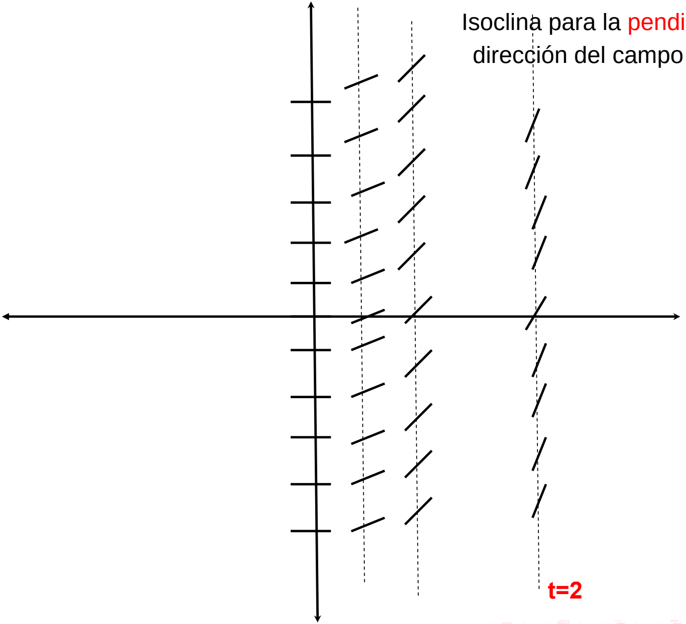
Isoclina para la pendiente 0
dirección del campo (1,0)

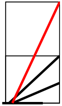



Isoclina para la pendiente 1/2
dirección del campo (1,1/2)
t=1/2

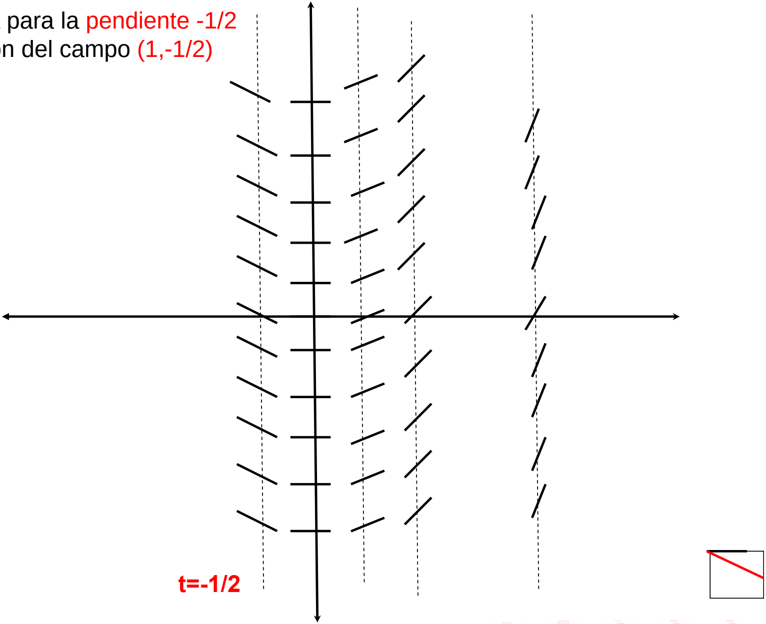

Isoclina para la pendiente 1
dirección del campo (1,1)
t=1

Isoclina para la pendiente 2
dirección del campo (1,2)

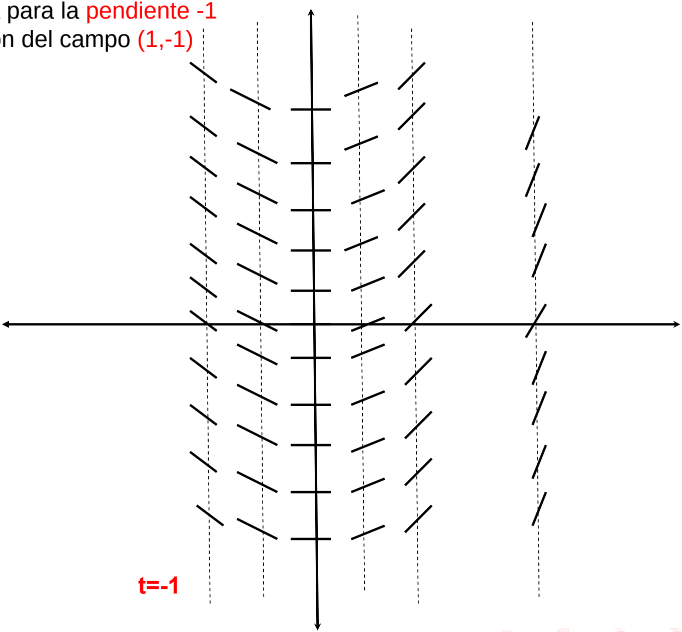


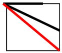


Isoclina para la pendiente -1/2
dirección del campo (1,-1/2)

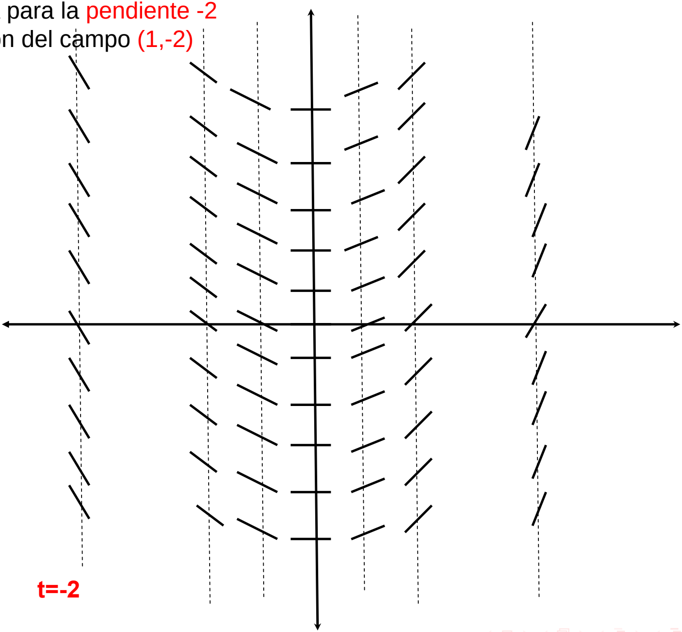


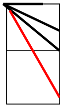
Isoclina para la pendiente -1
dirección del campo (1,-1)

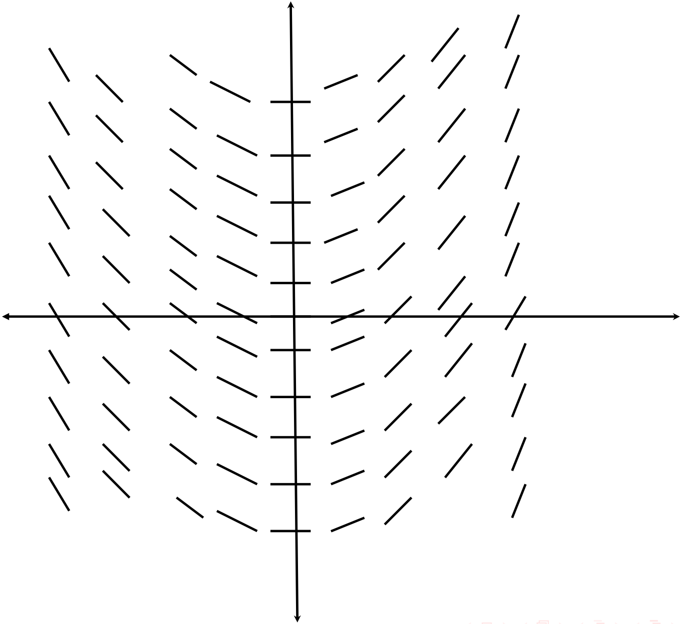


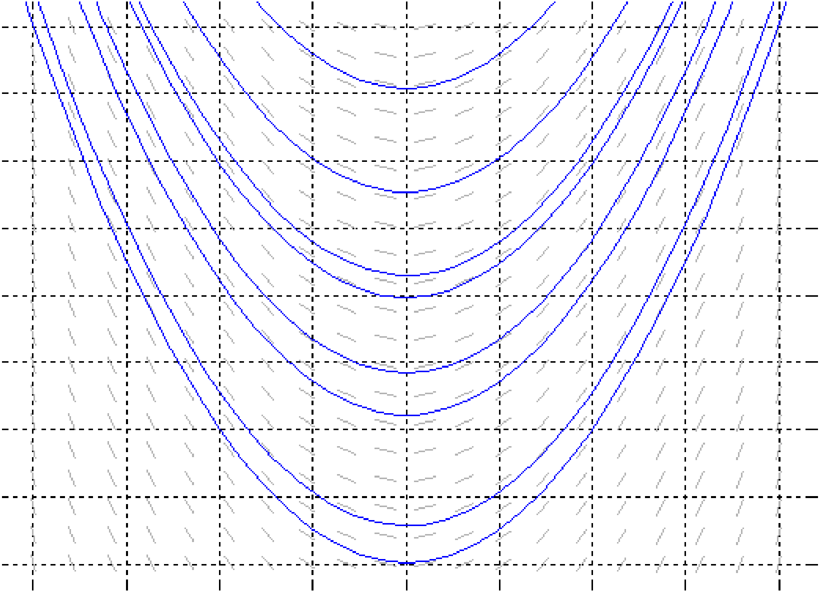


Isoclina para la pendiente -2
dirección del campo (1,-2)



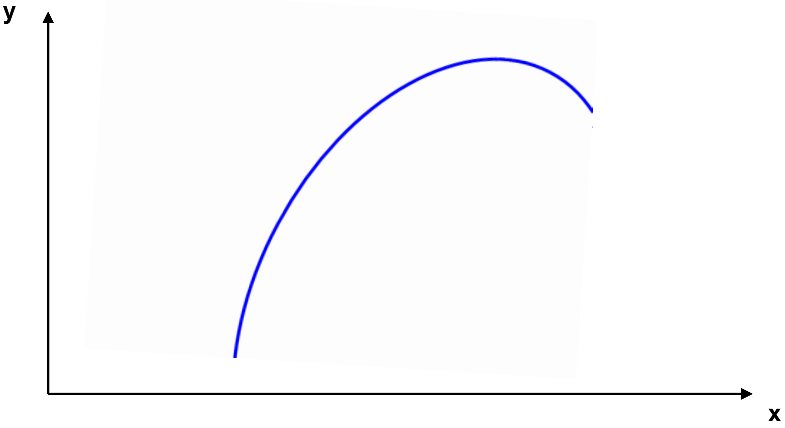




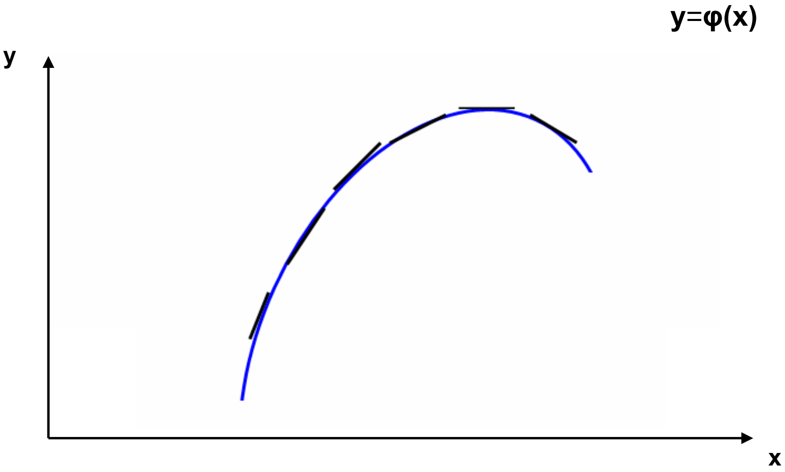


Dada la curva solución $\mathbf{y=\varphi(x)}$

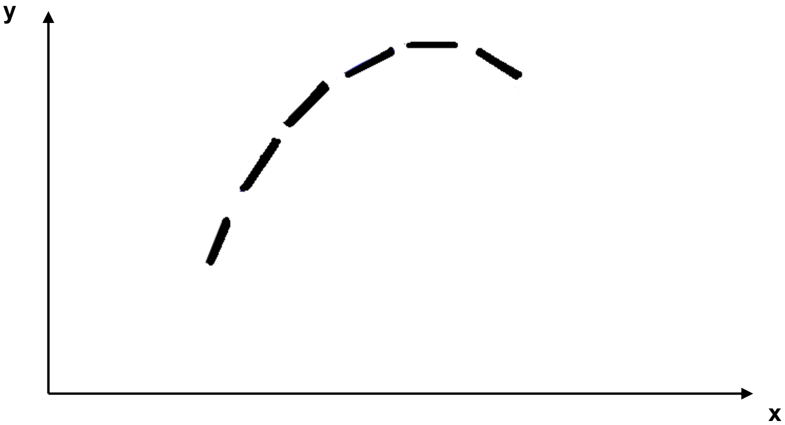
de la ecuación diferencial $y'=f(x,y)$,



…en cada punto, el vector que define el campo de direcciones es tangente a la curva solución

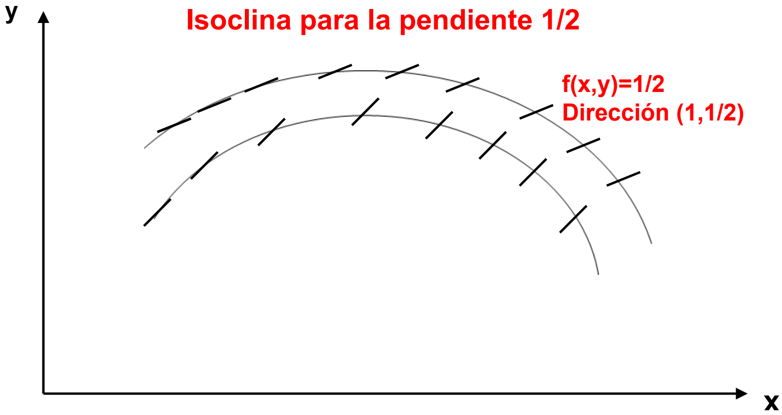


¿Si no se conoce la solución?: Dibujar campo de direcciones asociado a la ED

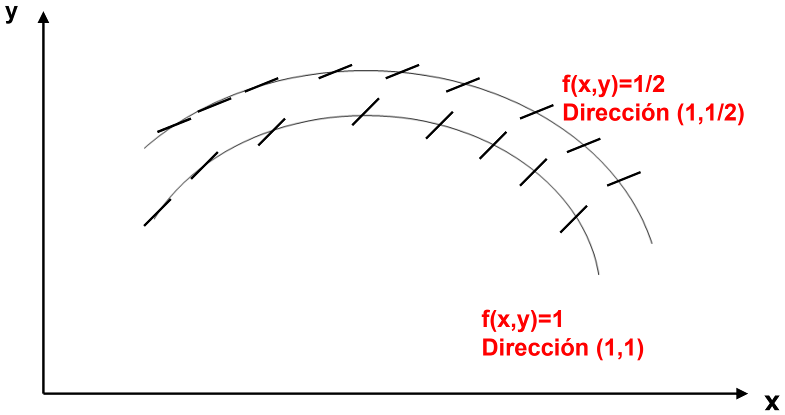


Dibujando a mano el campo de direcciones asociado a y'=f(x,y)

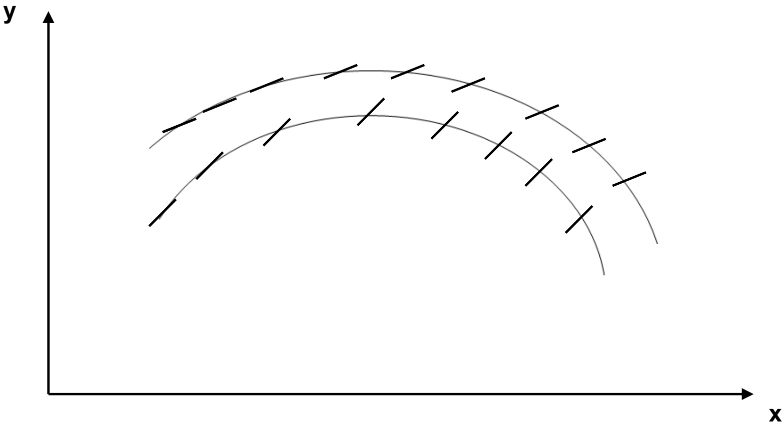
Dibujando a mano el campo de direcciones asociado a y'=f(x,y)



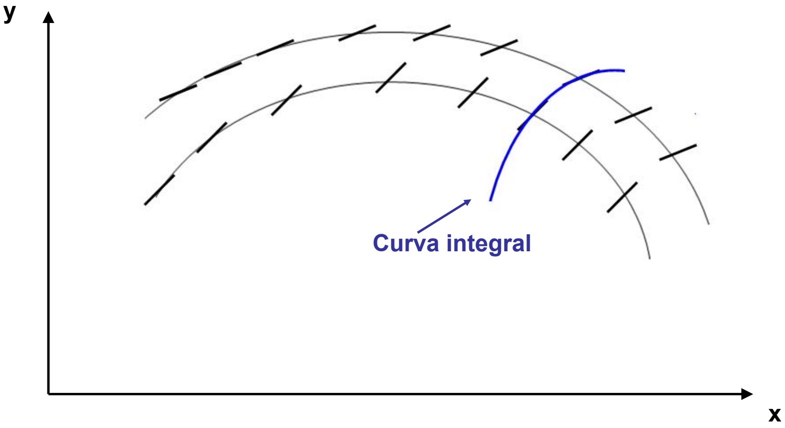
Dibujando a mano el campo de direcciones asociado a y'=f(x,y)



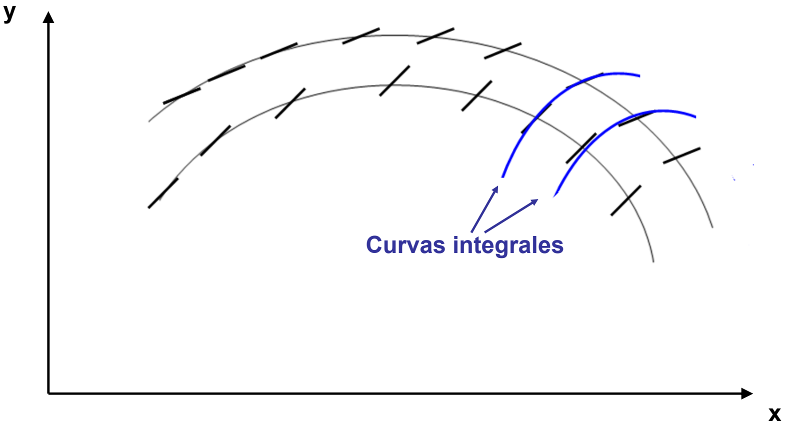
Dibujando a mano el campo de direcciones asociado a y'=f(x,y)



Dibujando a mano el campo de direcciones asociado a y'=f(x,y)

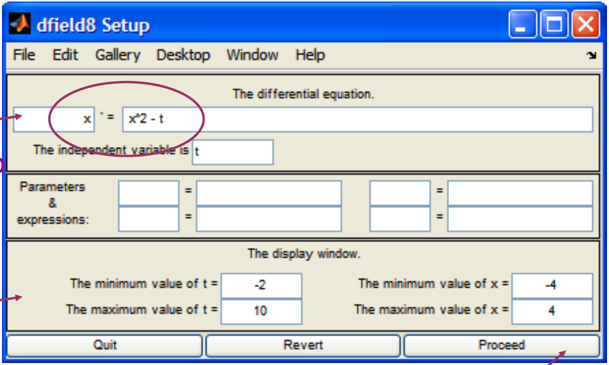


Dibujando a mano el campo de direcciones asociado a y’=f(x,y)



Campo de direcciones con MATLAB: el entorno dfield

Ecuación diferencial, Cambiar x por y
(t variable independiente)
Introducir la nueva ED

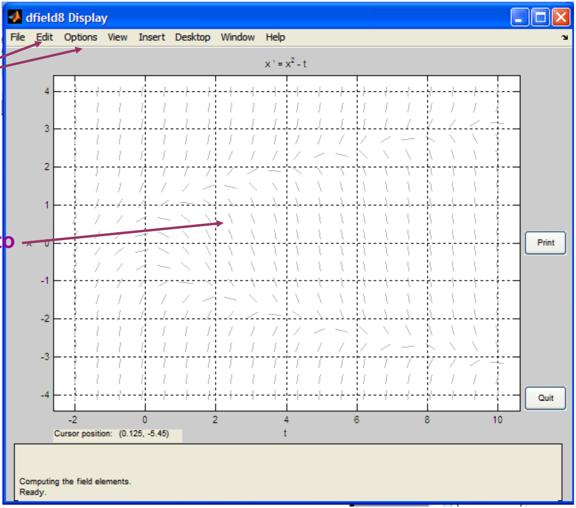


ajustar el dominio

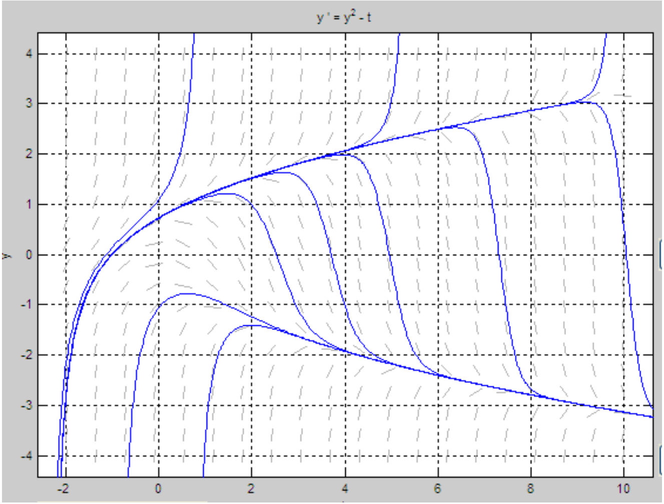
ejecutar

Seguir menús

Pinchar en un punto



J.C. Polking. Ordinary Differential Equations using MATLAB. Prentice Hall, Nueva York, 1995



J.C. Polking. Ordinary Differential Equations using MATLAB. Prentice Hall, Nueva York, 1995