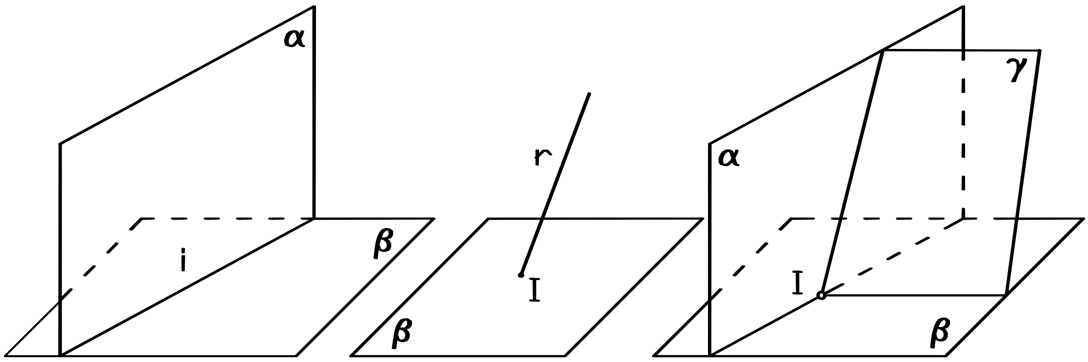
Tema 4: Intersecciones. Perpendicularidad y mínimas distancias. Paralelismo.

Intersecciones.

Una intersección es el lugar geométrico de los puntos que pertenecen a la vez a todos los elementos que intervienen (figura 1). La intersección de dos planos es una recta (Plano ∩ Plano = Recta). La intersección de plano con recta es un punto (Plano ∩ Recta = Punto). La intersección de tres planos es un punto (Plano ∩ Plano ∩ Plano = Punto).



$\alpha \cap \beta = i$ $\alpha \cap r = I$ $\alpha \cap \beta \cap \gamma = I$

Figura 1. Intersecciones.

Se van a resolver intersecciones entre planos y rectas, empezando por un caso particular, hasta llegar a la situación más general.

a) Recta ∩ Plano proyectante ($r \cap \alpha = I$)

La intersección de la recta con el plano se obtiene directamente donde el plano se encuentra de perfil y se pasa a la otra proyección (figura 2 a).

b) Plano ∩ Plano proyectante. ($\alpha \cap \beta(r,s) = i$)

Se obtienen las intersecciones de cada recta que define el plano β con α, según se resolvió anteriormente y ambos puntos definen la recta intersección solución (figura 2 b).

Pasos: 1º $r \cap \beta = Ir$
2º $s \cap \beta = Is$
3º $Is\ Ir = i$ Recta solución.

c) Recta ∩ Plano. ($r \cap \alpha(m,n) = I$)

Se traza un plano η auxiliar que contiene a r, se elige, por sencillez, que sea proyectante. Se obtiene la intersección de dicho plano con las rectas m y n, de α (caso b) y la recta que une dichos corta a r en I, que es la intersección pedida (figura 2 c)

Pasos: 1º η auxiliar que contiene a r.
2º $\eta \cap m = Im$
$\eta \cap n = In$ $\eta \cap \alpha = Im\ In = i$
3º $i \cap r = I$ (solución)

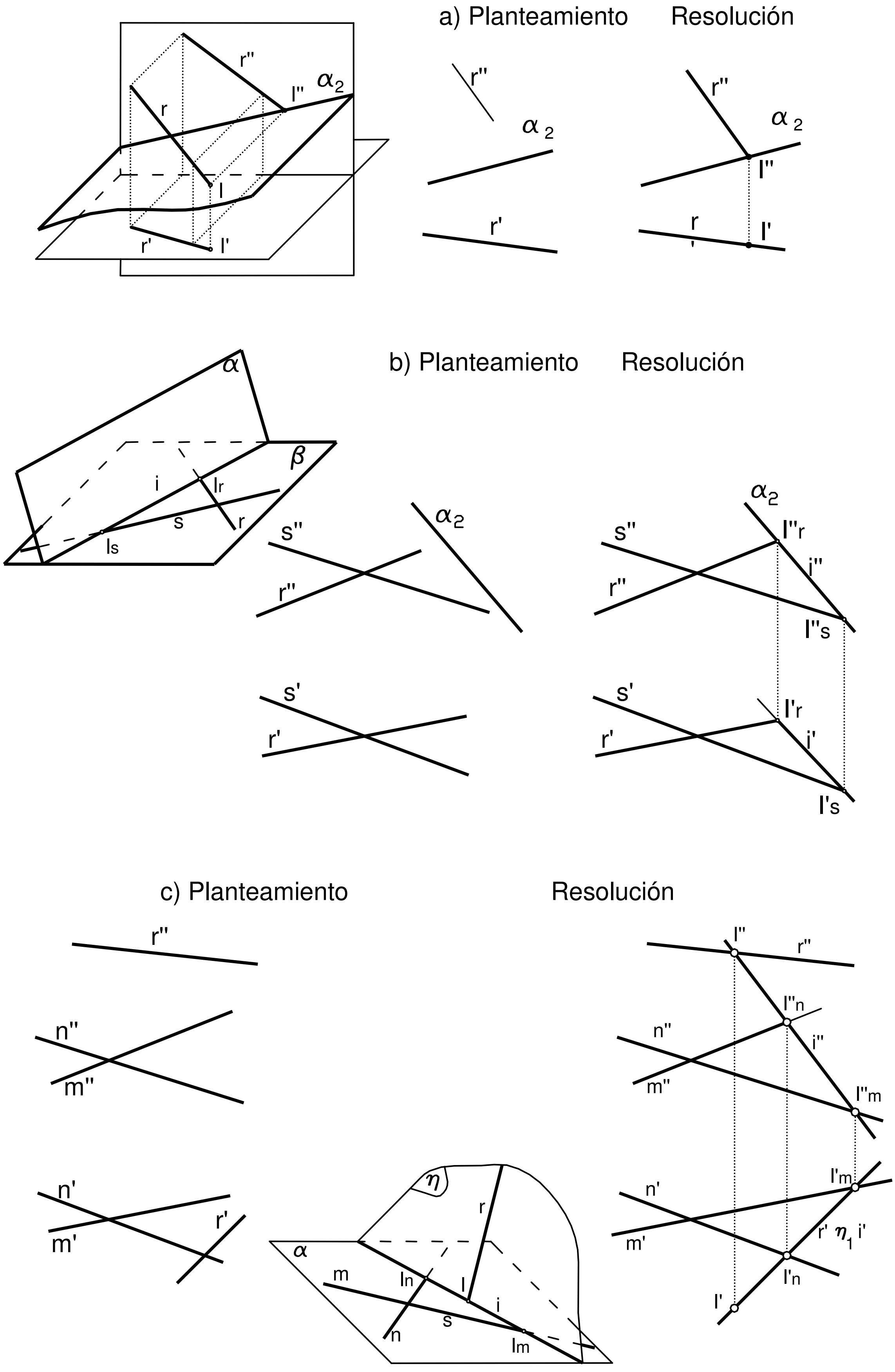


Figura 2. Intersecciones: recta - plano y plano - plano.

d) Intersección de planos. Caso general.

Este caso se puede resolver de diversas formas (como casi todos), se va a aplicar un método general, en el que se emplean dos planos auxiliares δ, γ, paralelos al vertical. Se obtienen así cuatro líneas de intersección, paralelas dos a dos, las cuales se cortan en dos puntos, que unidos dan la recta solución (figura 3).

Pasos:

1º $\delta \cap \alpha = i\ \alpha\delta$

$\delta \cap \beta = i\ \beta\delta$; $\quad i\ \alpha\delta \cap i\ \beta\delta = I\ \delta$

2º $\gamma \cap \alpha = i\ \alpha\gamma$

$\gamma \cap \beta = i\ \beta\gamma$; $\quad i\ \alpha\gamma \cap i\ \beta\gamma = I\ \gamma$

3º $I\ \delta - I\ \gamma = i$ (solución)

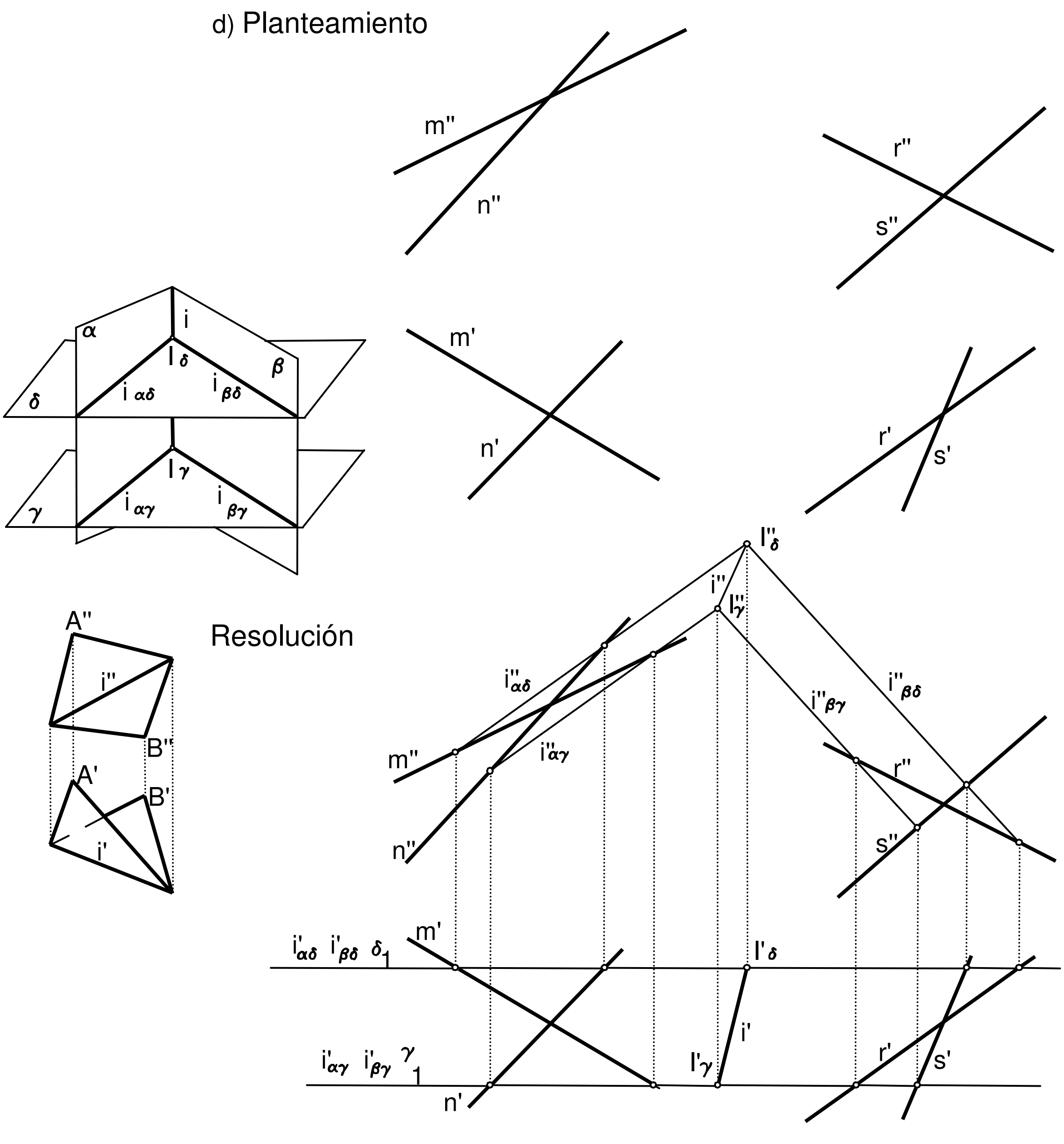


Figura 3. Intersección de planos. Caso general.

Perpendicularidad y mínimas distancias.

- Teorema fundamental de perpendicularidad.

La perpendicularidad es una propiedad que no se conserva en la proyección paralela ortogonal, pero si una de las perpendiculares es paralela al plano de proyección, ambas se proyectan perpendicularmente (figura 4-a).

Si una recta es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las rectas del plano que pasen por su intersección (figura 4-b).

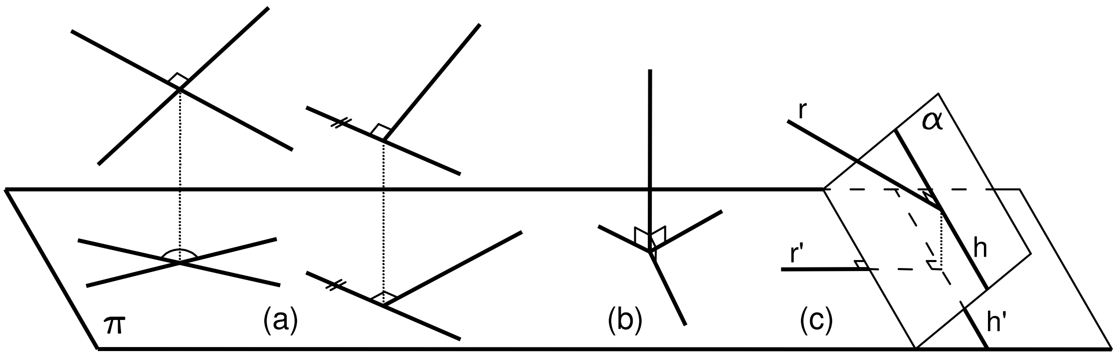
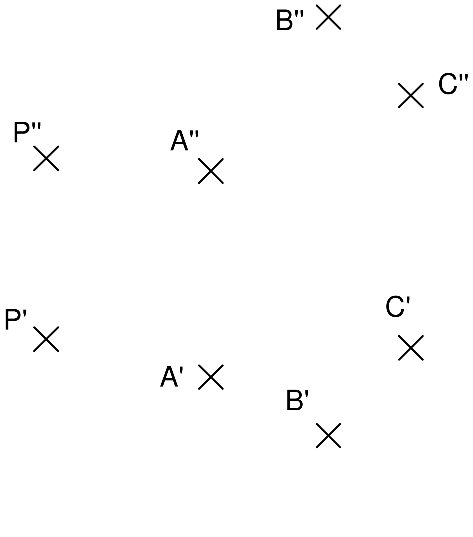


Figura 4: Perpendicularidad en la proyección paralela.

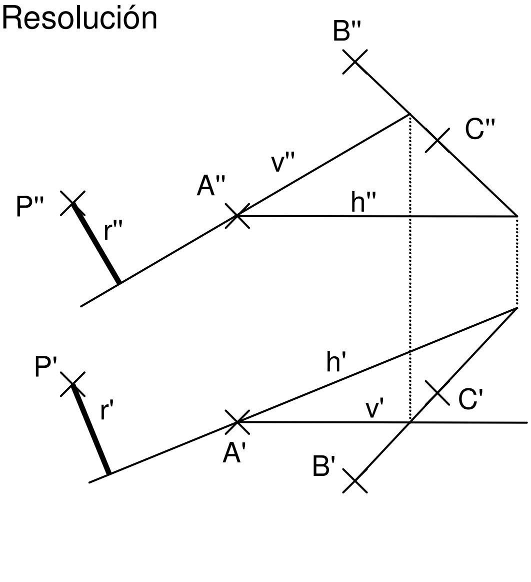
Consecuencia del teorema fundamental de perpendicularidad es que una **recta r perpendicular a un plano α**, (figura 4-c) se caracteriza por que sus proyecciones verifican que: **r’** ∟ **h’ ; r’’** ∟ **v’’**, ya que al ser perpendiculares todas las rectas del plano α que pasan por el pié de la recta r, una de ellas es paralela al horizontal y otra es paralela al vertical, con lo que cumplen el requisito para conservar la perpendicularidad en la proyección.

Ejercicios:
Trácese por el punto P, una recta r perpendicular al plano α(A,B,C).

Planteamiento

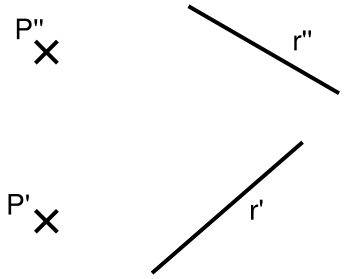


Resolución

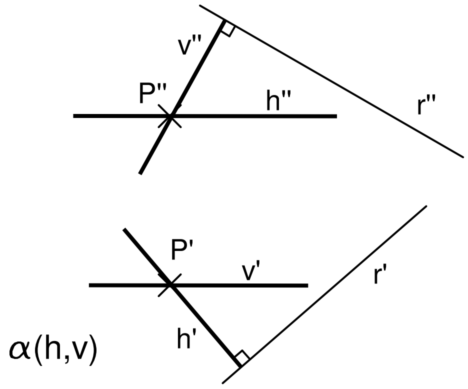


Trácese por el punto P, un plano α perpendicular a la recta r.

Planteamiento



Resolución

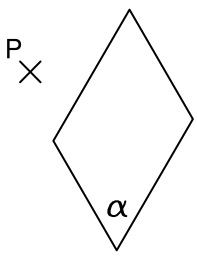


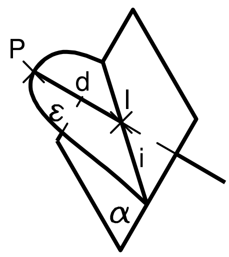
<u>El plano α queda definido por las rectas h,v.</u>

- Problemas sobre perpendicularidad y mínimas distancias:

Las mínimas distancias entre puntos, rectas o planos, son segmentos perpendiculares a éstos.

a) trazar por un punto una recta perpendicular a un plano dado -distancia de un punto a un plano-.

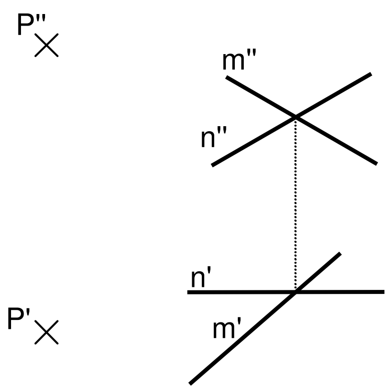




Pasos:

1º. Se traza r ∟ a α por el punto P.
2º. r ∩ α = I
ε (Proyectante de r) ∩ α = i
i ∩ r = I
3º. PI en VM es la distancia pedida.

Planteamiento



Resolución 1

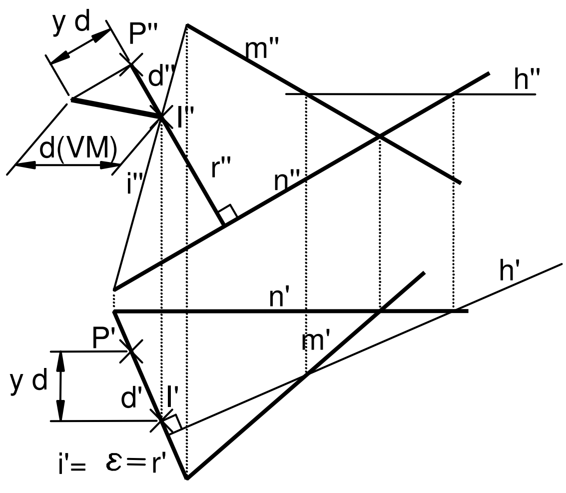
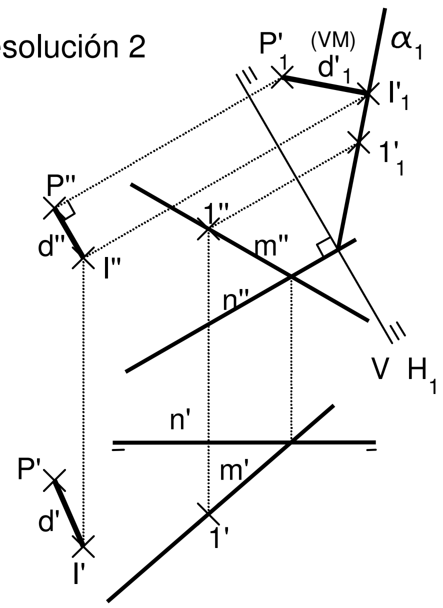


Figura 5: Distancia punto – plano, en geometría del espacio y en S. Diédrico.

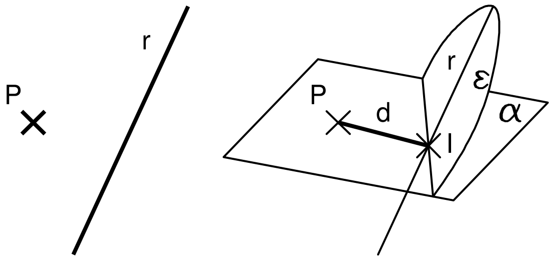
Resolución 2



De los métodos que hay para resolverlo, se muestran dos. En la figura 5 se resuelve siguiendo los pasos detallados en el croquis. Y en la figura 6 se plantea su resolución mediante cambio de plano, en el que se sitúa α(m,n) como proyectante, de este modo la mínima distancia aparece en verdadera magnitud.

Figura 6: Distancia punto – plano, mediante cambio de Plano.

b) trazar por un punto un plano perpendicular a una recta dada -distancia de un punto a una recta-.



Pasos:

1º. Se traza α(h,v) ∟ r por el punto P

2º. r ∩ α = I

ε (Proyectante de r) ∩ α = i

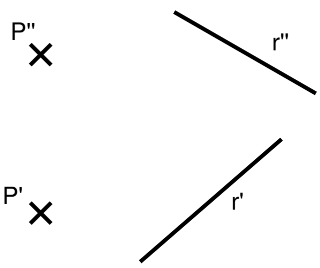
i ∩ r = I

3º. PI en VM es la distancia pedida.

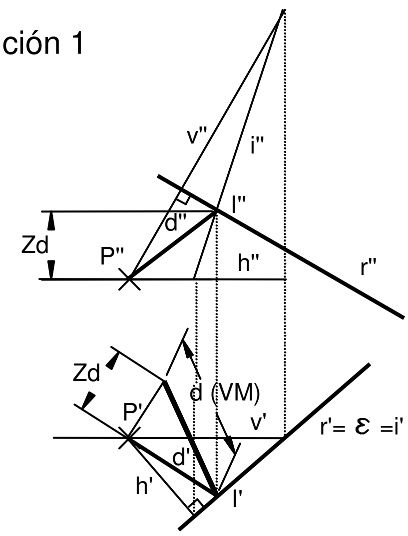
Figura 7: Distancia punto – recta, en geometría del espacio.

Como en el caso anterior, su resolución mediante cambios de plano, hasta situar r de punta, o bien el plano r, P en VM, simplifica el ejercicio, obteniéndose la distancia en VM (Figura 8)

Planteamiento



Resolución 1



Resolución 2 Resolución 3

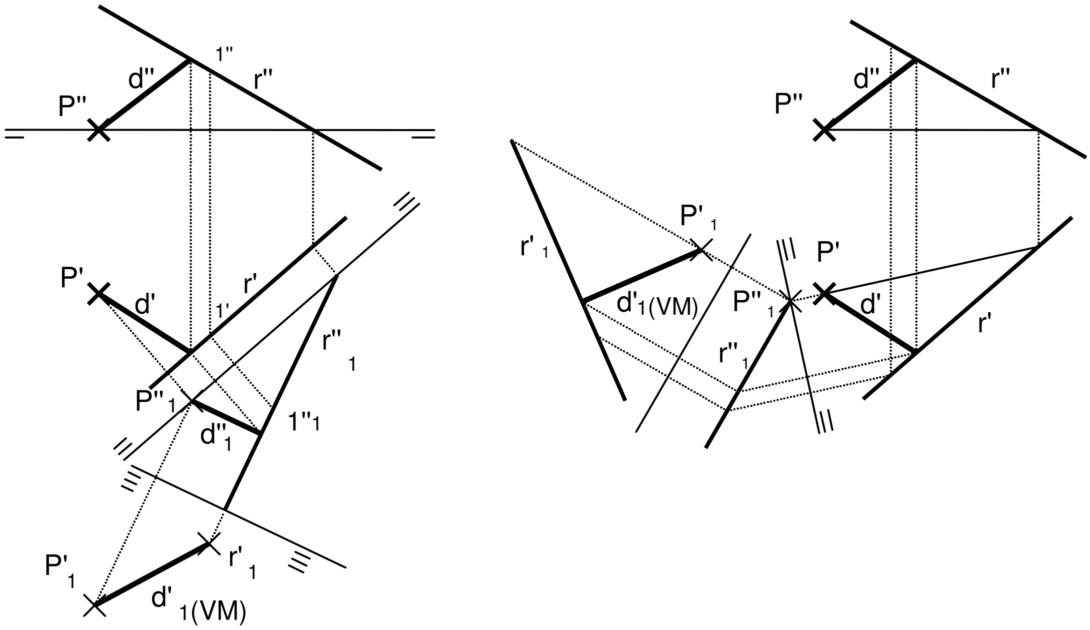


Figura 8: Distancia punto – recta.

c) Mínima distancia entre dos rectas paralelas.

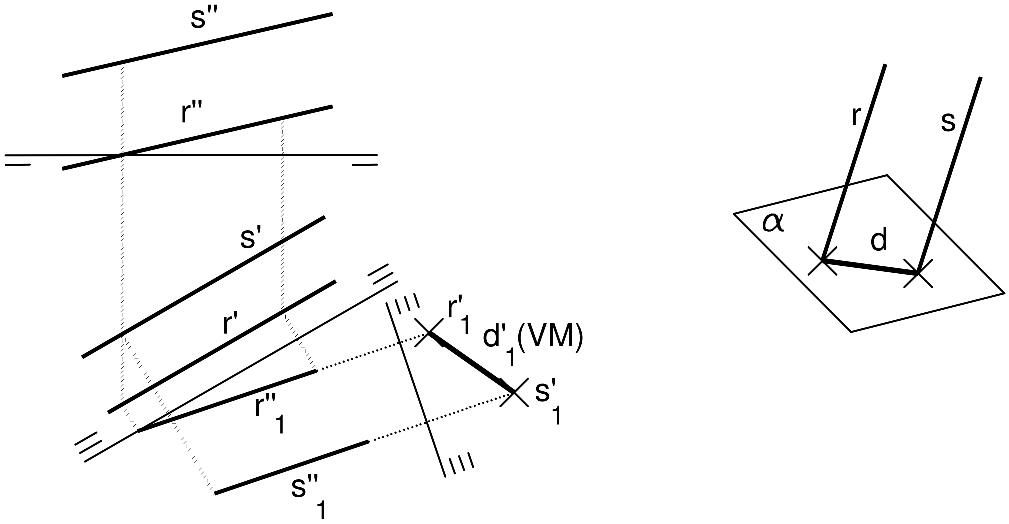


Figura 9: Mínima distancia entre rectas paralelas.

Al trazar un plano perpendicular a ambas rectas, la distancia entre las intersecciones es la distancia d pedida. Para su resolución, se sitúa el plano perpendicular α en verdadera magnitud, es decir, las rectas de punta.

e) mínima distancia entre planos paralelos.

En la recta perpendicular a ambos planos se encuentra la distancia pedida, para ello se obtiene en verdadera magnitud la longitud que hay entre las intersecciones de la recta con dichos planos. En este caso se resuelve mediante un cambio de plano, por medio del cual quedan los planos proyectantes (figura 10).

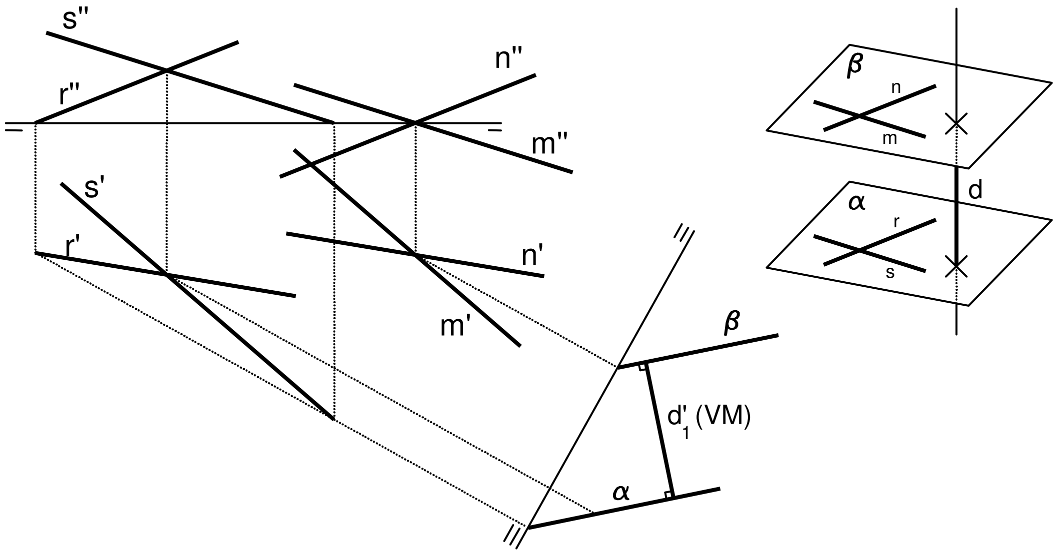
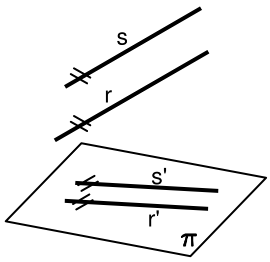


Figura 10: Mínima distancia entre planos paralelos.

f) mínima distancia entre dos rectas que se cruzan -perpendicular común-.

Este caso se ha visto anteriormente al tratar cambios de plano sucesivos.

Paralelismo.



En los sistemas de representación paralela, el paralelismo se conserva en la proyección.

- Problemas sobre paralelismo (figura 12):

A) trazar por un punto una recta paralela a otra dada;
B) trazar por un punto un plano paralelo a otro conocido;
C) trazar por una recta un plano paralelo a otra recta dada
D) trazar por un punto una recta paralela a un plano dado;
E) trazar por un punto un plano paralelo a una recta dada;

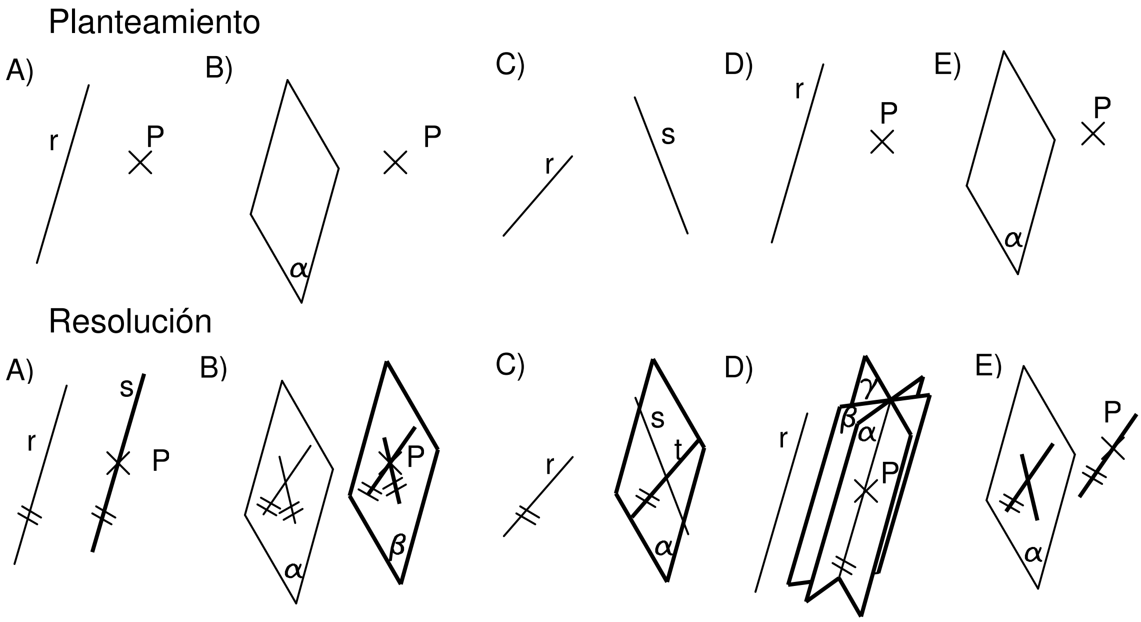


Figura 11: Paralelismo.

De los ejercicios de paralelismo, merece reseñarse, que los tres primeros casos tienen solución única, mientras que en el D) la solución es un conjunto simplemente infinito o haz de planos que contienen a la recta paralela a r por P. Y en el E) la solución es cualquier recta que pasando por P sea paralela a otra contenida en el plano α, es decir, el conjunto simplemente infinito de rectas contenidas en un plano paralelo a α por P. Su resolución en el sistema diédrico es inmediata.