Tema 5: Ángulos entre rectas y planos. Triedros

Angulo de dos rectas.

El ángulo de dos rectas es una de las magnitudes de las formas planas, y para obtener su verdadera magnitud se aplica el cambio de plano, giro o abatimiento, vistos anteriormente. En la figura 1 se muestra la VM de ABC y en el caso de que las rectas estén de perfil, en la proyección sobre el 2º vertical se encuentran en VM.

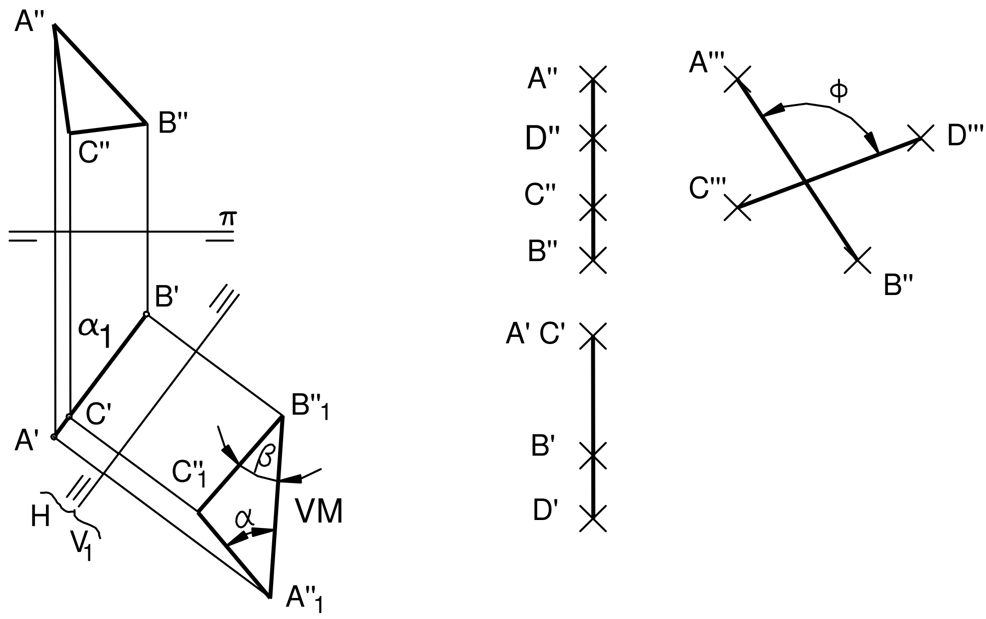


Figura 1. Verdadera Magnitud de ángulos de rectas.

Angulo de recta y plano.

El procedimiento general se realiza, (según se indica en la figura 2, en la que se muestra la propuesta de un ejercicio, en el que el plano α está dado por las rectas m,n, el esquema en geometría del espacio y su resolución diédrica), trazando:

1. por un punto **1** de **r**, recta **s** perpendicular al plano α.
2. se obtiene el ángulo complementario a Θ, entre r y α trazando su VM (por abatimiento, cambio de plano,…)

Si se desea obtener el ángulo Θ, es preciso obtener sobre α la proyección t de r, es decir, la intersección **t** de δ(r,s) con α. Para ello:

3. Se obtienen los puntos intersección: r ∩ α =2 y s ∩ α = 3; 2-3 = t.
4. t-r en verdadera magnitud es el ángulo Θ pedido.

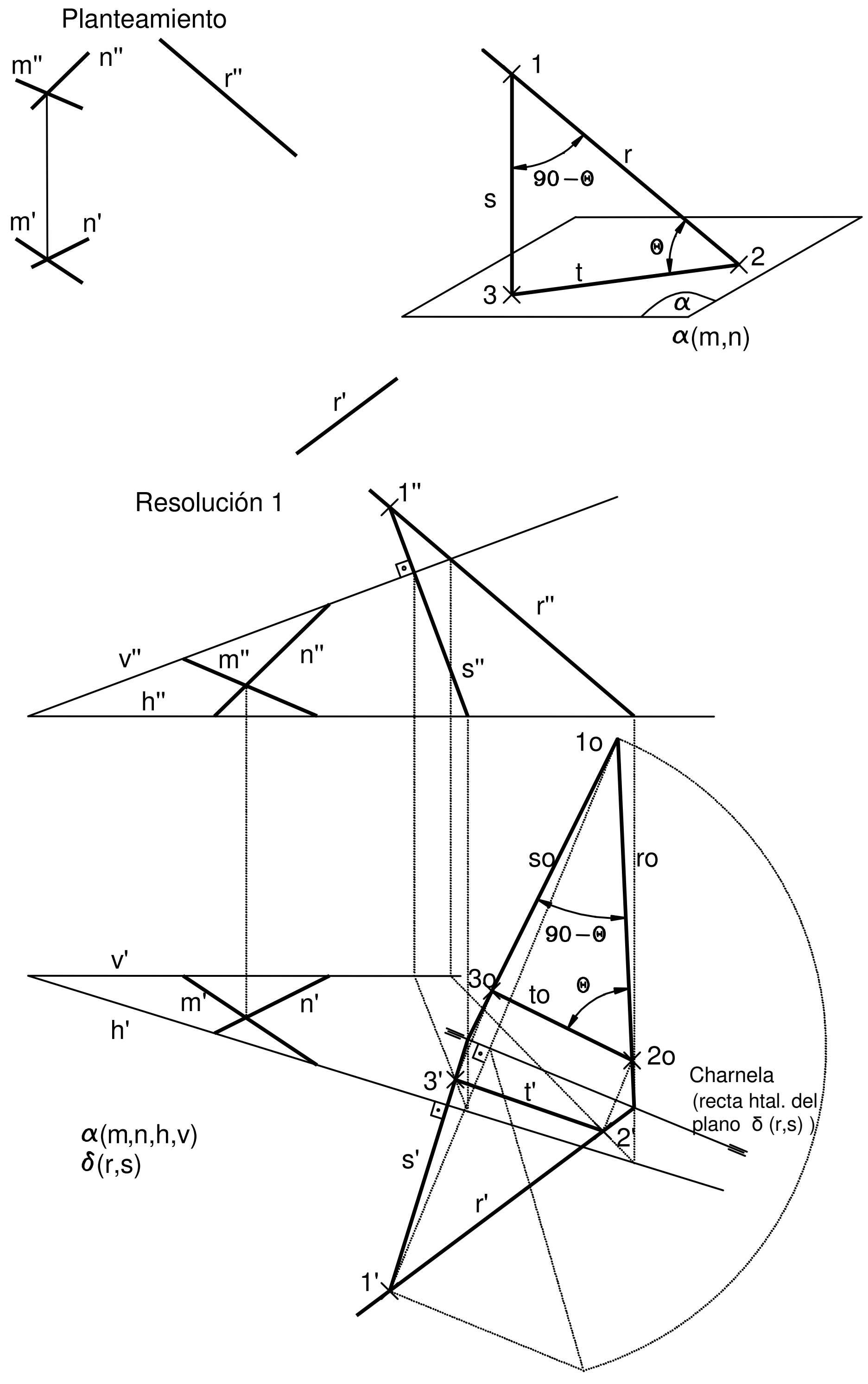


Figura 2: Ángulo recta-plano. Propuesta de ejercicio, esquema en geometría del espacio y resolución diédrica.

Otro procedimiento de resolución es mediante cambios de plano. En la figura 3 se muestra su resolución. Previamente, en el caso de que la recta esté de punta, con un cambio de plano para situarlo de perfil, se obtiene el ángulo pedido en verdadera magnitud.

En el caso general, es preciso hacer dos cambios de plano para situar la recta de punta y otro para que el plano α quede de perfil y obtener el ángulo pedido.

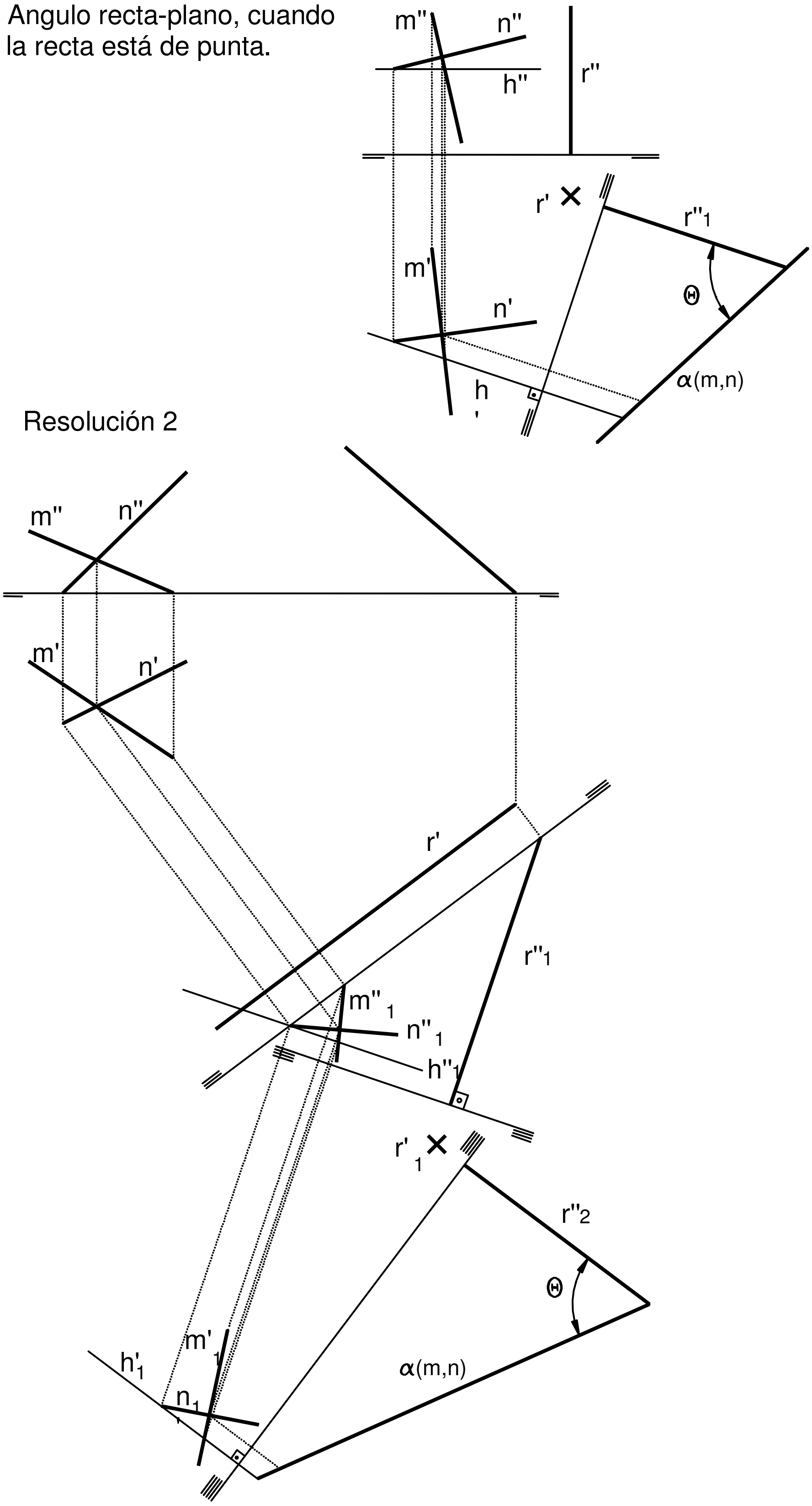


Figura 3: Ángulo recta-plano. Resolución mediante cambios de plano.

Angulo de una recta con los planos de proyección.

Perspectiva caballera. Plano de dibujo.

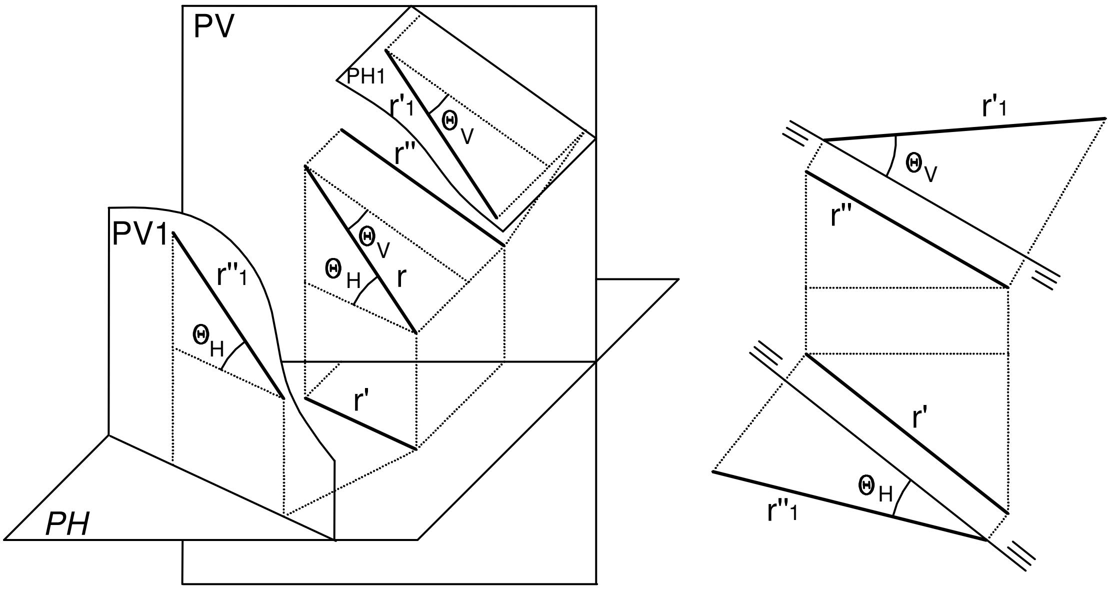


Figura 4: Ángulo de la recta con los planos de proyección.

Se resuelve con facilidad mediante cambios de plano, según muestra la figura 4.

Angulo de un plano con los de proyección.

Perspectiva caballera. Plano de dibujo.

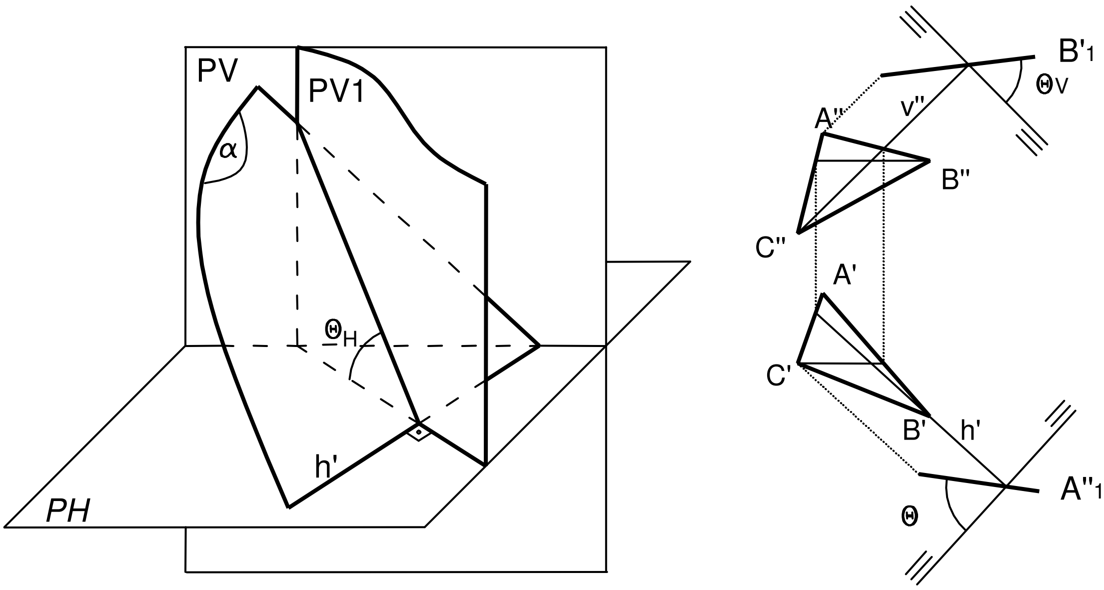


Figura 5: Angulo de un plano con los de proyección.

Se ve con claridad en la figura 5, la obtención del ángulo pedido mediante cambios de plano.

Angulo de dos planos.

Para conocer el ángulo que forman dos planos, según los datos de partida, se aplican los siguientes procedimientos.

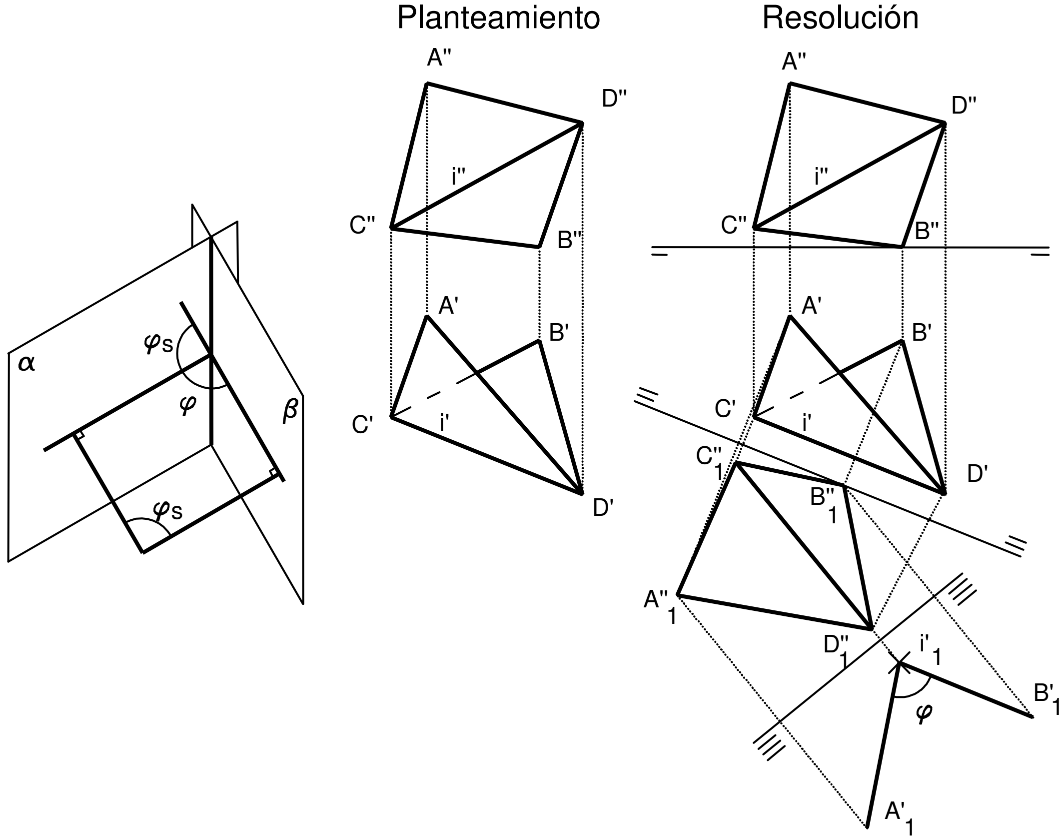


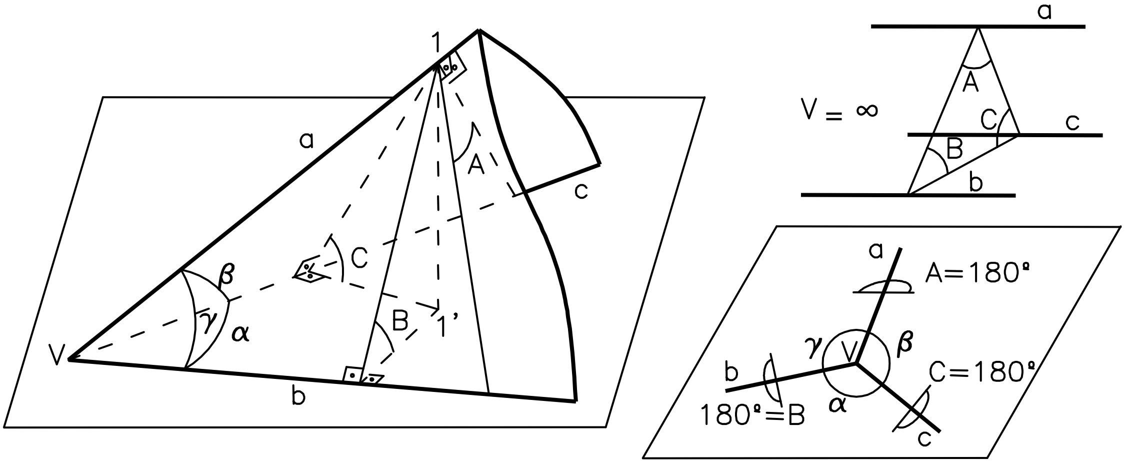
Figura 6: Angulo de dos planos.

En el caso del sistema diédrico “tradicional”, se resuelve trazando por un punto, rectas perpendiculares a los dos planos dados. Así, el ángulo que forman esas dos rectas es el suplementario del que forman los planos. El plano formado por ambas rectas es perpendicular a los otros dos y a su intersección (Figura 6, izquierda). Si los planos están dados por medio de figuras planas y se conoce la intersección entre ellos, se resuelve con claridad por medio de dos cambios de plano, situando dicha intersección de punta, según se muestra en el ejercicio de la figura 6.

Estudio de triedros.

- Definición, elementos principales y relaciones que limitan su existencia.

Un triedro es una figura constituida por tres caras, las cuales se cortan en un punto o vértice y en tres aristas (Figura 7). Se puede considerar como una pirámide triangular sin su base. Las caras del triedro están definidas por el ángulo que forman sus dos aristas, α, β, γ. Las aristas a, b, c son las intersecciones de los planos y convergen en el punto V, vértice del triedro. Las caras, dos a dos forman los ángulos diedros A, B, C. (Los lados de dichos ángulos son perpendiculares a las aristas). El criterio para denominar a los elementos del triedro, es que la arista esté frente a la cara homónima, es decir, a frente a α, b frente a β, c frente a γ.



$\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$

$0 < \alpha + \beta + \gamma < 360^{\circ}$

$180^{\circ} < A + B + C < 3x180^{\circ}$ (540)

Figura 7. Elementos de un triedro y relaciones que limitan su existencia.

Las condiciones que deben cumplir los datos de un triedro para que exista, se deducen con facilidad de la figura 7, son:

$0 < \alpha + \beta + \gamma < 360^{\circ}$
$180^{\circ} < A + B + C < 3x180^{\circ}$ ($=540^{\circ}$)
$\alpha + \beta > \gamma$; $\alpha + \gamma > \beta$; $\beta + \gamma > \alpha$. En que la suma de dos caras es mayor que la tercera.

Se trata de resolver los triedros, es decir, conocer los datos α, β, γ, A, B, C, siendo conocidos tres de ellos, por consiguiente hay seis casos, en los que los datos son:

1. Las tres caras: α, β, γ.
2. Dos caras y el diedro comprendido, por ejemplo: α, β, C
3. Dos diedros y la cara opuesta a uno de ellos, por ejemplo: α, A, B.
4. Los tres diedros: A, B, C.
5. Dos diedros y la cara que los contiene, por ejemplo: A, B, γ.
6. Dos caras y un diedro de la otra cara, por ejemplo: α, A, β.

- Triedro suplementario. División del espacio por los planos de un triedro.

Si desde un punto se trazan líneas perpendiculares a las caras de un triedro (figura 8), se obtiene un nuevo triedro de vértice Vs, denominado suplementario, en el que:

$\alpha + As = 180^{\circ}$ $\quad$ $A + \alpha s = 180^{\circ}$
$\beta + Bs = 180^{\circ}$ $\quad$ $B + \beta s = 180^{\circ}$
$\gamma + Cs = 180^{\circ}$ $\quad$ $C + \gamma s = 180^{\circ}$

Se observa que los tres últimos casos de triedros se pueden resolver mediante su suplementario, reduciéndolos a los tres primeros:

1. α, β, γ.	4. A, B, C.	Suplementario	αs=180º-A, βs=180º-B, γs=180º-C
2. α, β, C	5. A, B, γ.	Suplementario	αs=180º-A, βs=180º-B, Cs=180º-γ
3. α, A, B.	6. A, α, β.	Suplementario	αs=180º-A, As=180º-α, Bs=180º-β.

Una vez resuelto, se transforman los resultados al triedro pedido que ya se puede trazar.

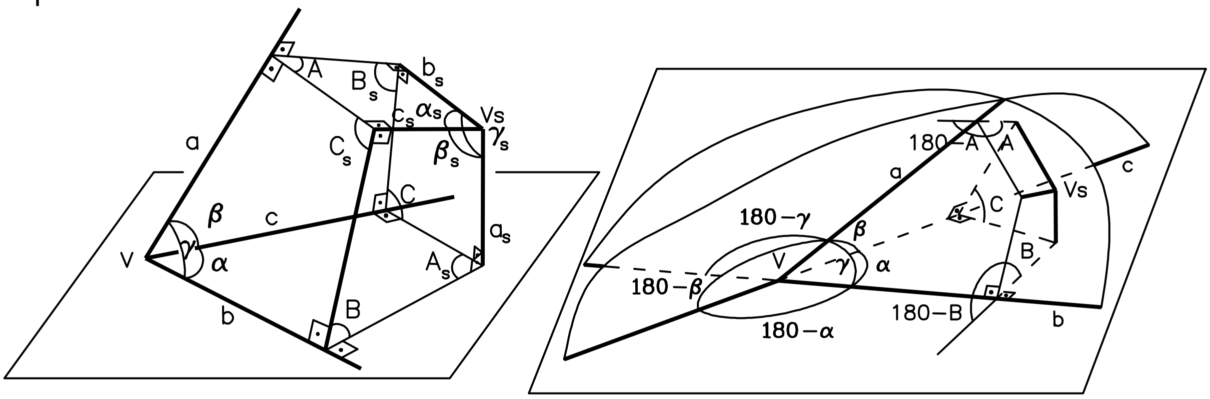


Figura 8: Triedro suplementario. División espacial de los planos del triedro.

Los planos del triedro dividen el espacio en ocho partes, que son iguales dos a dos, los opuestos por el vértice. Considerando el semiespacio superior del plano horizontal α, observando en sentido horario los cuatro triedros resultantes, según se aprecia en la figura 8, tienen las magnitudes relacionadas como sigue:

Triedro 1	Triedro 2	Triedro 3	Triedro 4
α	180-α	α	180-α
β	180-β	180-β	β
γ	γ	180-γ	180-γ
A	180-A	A	180-A
B	180-B	180-B	B
C	C	180-C	180-C

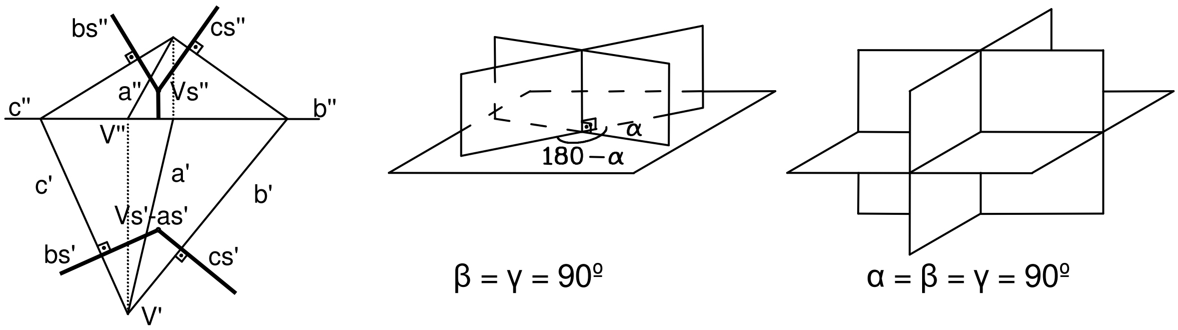


Figura 9: Representación diédrica del triedro suplementario. Triedro con dos caras que miden 90º. Triedro trirrectángulo, las tres caras miden 90º.

Si el triedro tiene dos caras iguales, dos de los cuatro triedros de la tabla son iguales. Si las dos caras iguales miden 90º, hay sólo dos triedros diferentes. El triedro trirrectángulo se caracteriza por tener todos los ángulos rectos, con lo que sólo hay un tipo de triedros (figura 9). Esto, junto con el triedro suplementario facilita la resolución de triedros en los que los datos de partida son muy grandes.

- Caso 1º. Construir un triedro, dadas las tres caras α, β, γ.

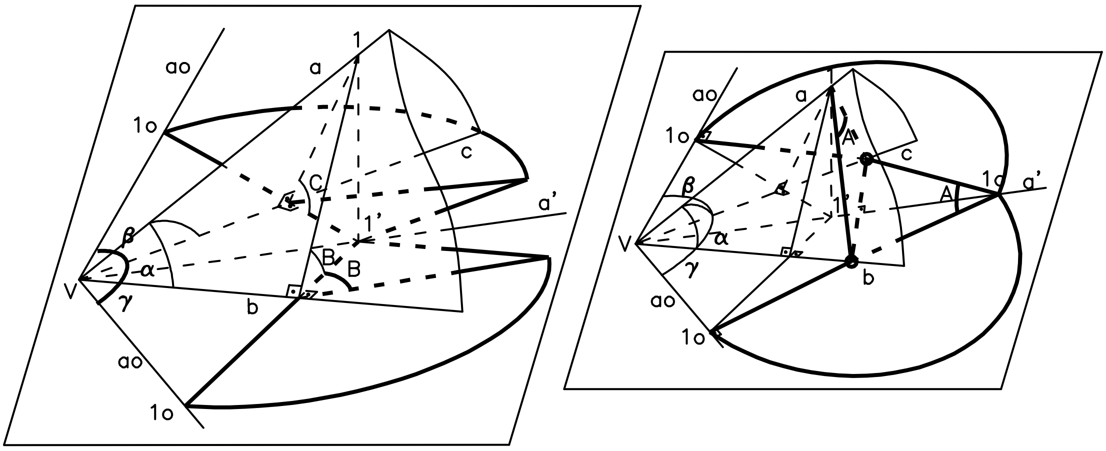


Figura 10: Obtención de los elementos del triedro, dadas las tres caras.

En este caso se visualiza la forma de obtener los elementos del triedro, que será aplicable a los demás. En la figura 10 se indica, en el espacio, como determinar la verdadera magnitud de los tres diedros A, B y C, para ello:

1. Se abate la arista **a**, a ambos lados con charnela **b** y **c** mediante los ángulos β y γ.

2. Se toma un punto 1o que equidista de V, se traza desde 1o perpendicular a b y c respectivamente y se obtiene 1'. Completando el proceso inverso al abatimiento, se tienen los ángulos B y C y la cota del punto 1.

3. El ángulo A se obtiene sabiendo que sus lados son perpendiculares a la arista a, por lo que trazando desde 1o perpendicular a ao, (ya que en el abatimiento se conserva la perpendicularidad), hasta cortar a las aristas b y c, desde donde se trazan sendos arcos que cortan a' en 1o, que es el vértice del ángulo en verdadera magnitud.

En la figura 11 se muestra su resolución diédrica en el plano de dibujo.

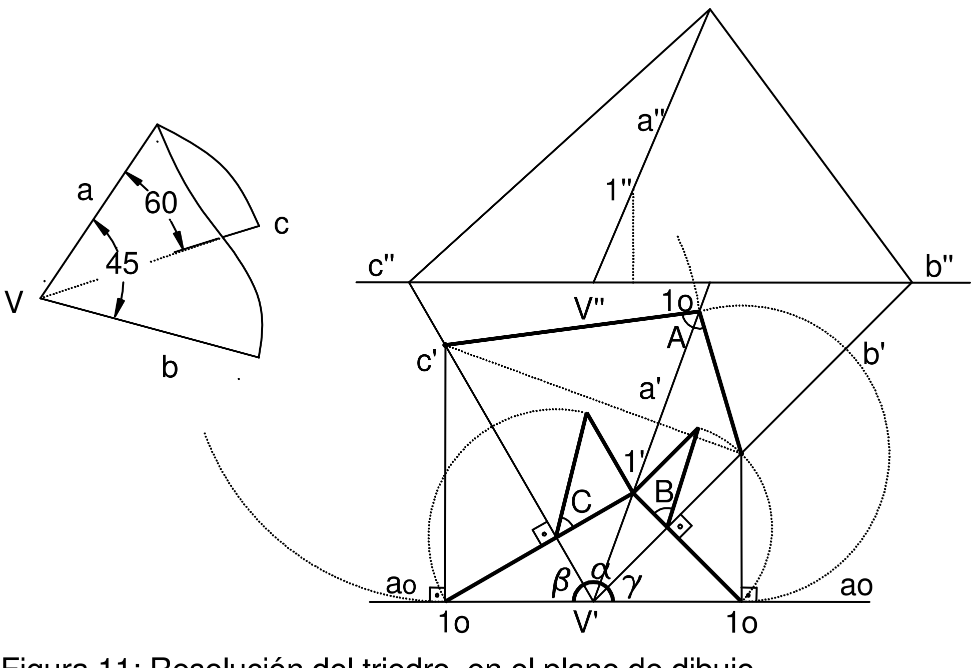


Figura 11: Resolución del triedro, en el plano de dibujo.

- Caso 2º. Construir un triedro dadas dos caras y el diedro comprendido: α, β, C.

En este caso se trata de determinar A, B, γ, para ello se siguen los pasos siguientes (figura 12):

1. Se dibuja V, b, c, α. Se traza el ángulo β, la arista a_o y un punto 1_o, el cual se desabate aplicando el ángulo C, obteniéndose el punto 1' y su cota.
2. Se abate el punto 1 con la charnela b, y se obtiene B y γ.
3. El ángulo A, se obtiene como en el caso anterior, figuras 10 y 11.

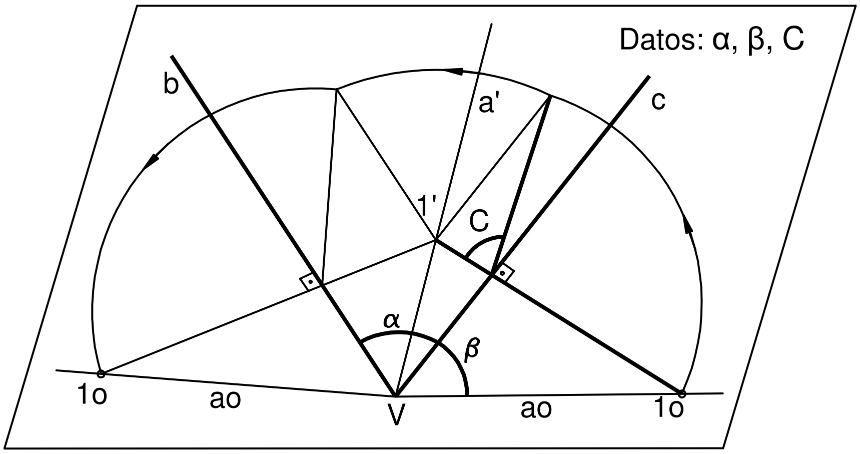


Figura 12: Resolución del Caso 2º de triedros: α, β, C.

- Caso 3º. Construir un triedro conocidos dos diedros y la cara opuesta a uno de ellos: α, A, B.

Para resolver el triedro es preciso obtener β, γ, C, pudiendo tener dos soluciones, según se aprecia en las figuras 13 y 14, para lo cual se siguen los pasos:

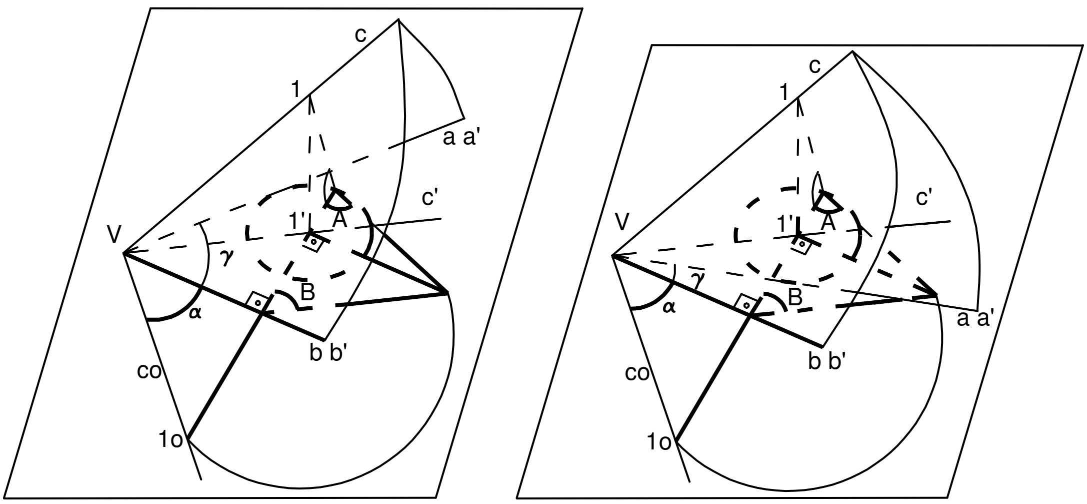


Figura 13: Resolución del Caso 3º de triedros: α, A, B.

1. Se traza la arista del diedro B, contiguo a la cara conocida (es decir, del que no se conoce la cara opuesta).

2. Se traza el ángulo B en un punto cualquiera de la arista, se asigna una cota y se abate el punto 1, obteniendo 1_o.

3. Se traza desde 1_o, c_o que forma el ángulo α con b' y se obtiene V.

4. Por 1' se traza la base del cono correspondiente al ángulo A y altura la cota de 1.

5. Desde V, las tangentes a la base del cono son las dos aristas **a** solución que puede tener el triedro, de donde se obtienen los ángulos **γ** posibles.

6. El ángulo β se obtiene por abatimiento de la arista c con charnela a' y el ángulo C como en casos anteriores, figuras 10 y 11.

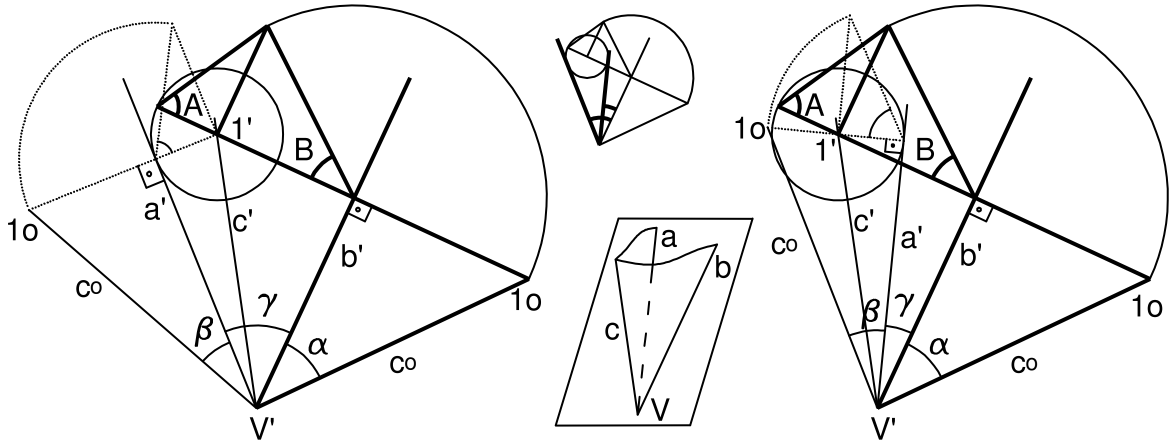


Figura 14: Resolución diédrica del 3^er caso.

- Caso 5º. Construir un triedro definido por una cara y sus dos diedros adyacentes. A, B, γ.

Por su fácil visualización, se muestra en la figura 15 la resolución en perspectiva y diédrica de este 5º caso.

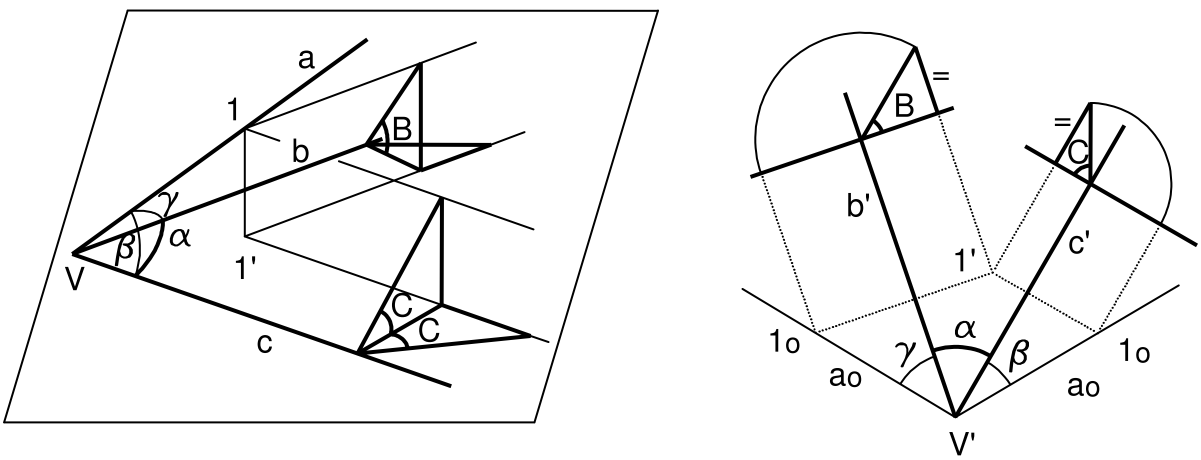


Figura 15: Resolución perspectiva y diédrica del 5^er caso.