TEMA 5:

TRANSPORTE EN ESTADO ESTACIONARIO: RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS ODE-BVP

PROBLEMAS PROPUESTOS

Asignatura:	**Cálculo Avanzado de Procesos Químicos.**
Titulación:	**Ingeniería Química**
Curso:	**Cuarto**
Cuatrimestre:	**Primero**

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 1:

Fuentes: **Davis, M. E.;** *Métodos y Modelos Numéricos para Ingenieros Químicos.* Compañía Continental S.A. de C.V. México. 1990. (Pág 113).

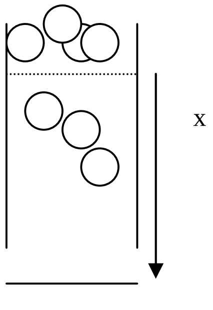
Rice, R.G., Do, D.D.; *Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers*, Ed John Wiley & Sons, 1995. (Pág 53).

Para los siguientes ejemplos de problemas ODE-BVP indicar: a) clasificación de las ecuaciones, b) clasificación de las condiciones frontera, c) interpretación ingenieril de las condiciones frontera.

I) La conducción axial y la difusión en un reactor tubular adiabático se puede describir por:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Pe}\frac{d^2C}{dx^2} - \frac{dC}{dx} - R(C,T) = 0 \\ &\frac{1}{Bo}\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} - \beta R(C,T) = 0 \end{aligned} \quad \text{con} \quad \left.\begin{aligned} &\frac{1}{Pe}\frac{dC}{dx} = C - 1 \\ &\frac{1}{Bo}\frac{dT}{dx} = T - 1 \end{aligned}\right\} \text{para } x = 0 \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} &\frac{dC}{dx} = 0 \\ &\frac{dT}{dx} = 0 \end{aligned}\right\} \text{para } x = 1$$

II) Un gas se difunde en una interfase plana de un líquido y al disolverse reacciona con el líquido de forma irreversible con una velocidad de reacción $Ra = kC_a^n$ (moles/vol * unidad de tiempo). El perfil de concentraciones a lo largo de la profundidad del líquido (x) cuando el sistema se encuentra en estado estacionario se describe por :



$$D_e \frac{d^2 C_a}{dx^2} - k_n C_a^n = 0$$

Encontrar las condiciones frontera que permitan resolver este problema de forma general.

Problema 2:

Fuente: **Walas, S. M.;** *Modeling with Differential Equations in Chemical Engineering*. Ed Butterworth-Heinemann, Stoneham, MA, USA. 1991. (Pág. 180).

La ecuación $\frac{d^2T}{dx^2} - 0.01(T - 20) = 0$ define el flujo de temperatura, en estado estacionario, en la pared de horno de 10 cm de grosor. Se sabe que en el punto x=10 la temperatura es de 200 ºC y en el punto x=0 la temperatura es de 40ºC.

1) Obtener el sistema de ecuaciones tridiagonal que resulta de aplicar diferencias finitas a las derivadas en cada uno de los nodos al tomar h=2 cm.

2) Obtener la temperatura en cada uno de esos nodos mediante el método de diferencias finitas

3) Obtener el perfil de temperaturas empleando el método de disparo, utilizando Euler y una tolerancia de 1ºC para T(x=10).

4) Utilizar la solución analítica para comprobar la exactitud de la aproximación de diferencias finitas y disparo

5) Obtener el perfil de temperaturas mediante diferencias finitas y disparo suponiendo en x=0 una condición aislante

6) Obtener el perfil de temperaturas mediante diferencias finitas suponiendo condición constante en x=0 y la siguiente condición en x=10:

$$0.2\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=10} = 2.0(200 - T_{x=10})$$

Problema 3:

Fuente: **Davis, M. E.**; *Métodos y Modelos Numéricos para Ingenieros Químicos*. Compañía Continental S.A. de C.V. México. 1990. (Pág 93).

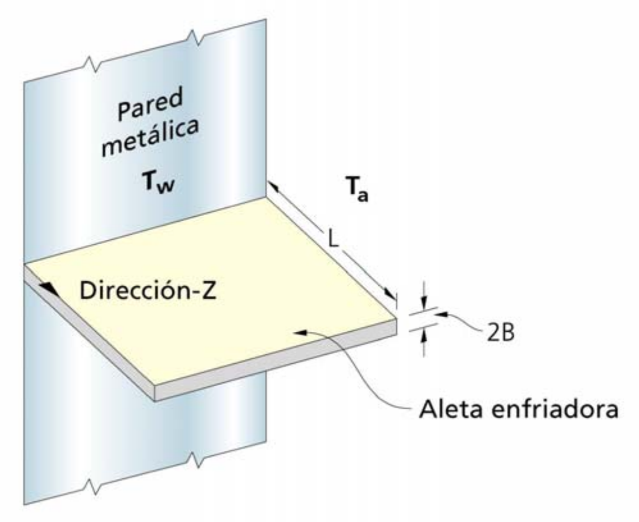
Una aplicación sencilla pero práctica de la conducción de calor es el cálculo de la eficiencia de una aleta enfriadora. Tales aletas se utilizan para aumentar el área de la que se dispone para la transferencia de calor entre paredes metálicas y fluidos poco conductores como son los gases. En la figura se presenta una aleta rectangular. Para calcular la eficiencia de esta aleta primero se debe calcular el perfil de temperatura en ella. Si L>>>B, no se pierde calor en el extremo o en los bordes y el flujo de calor en la superficie está dado por $q = \eta(T - T_a)$, en la cual el coeficiente de transferencia de calor por convección es constante , como lo es la temperatura del fluido que la rodea Ta, por lo cual la ecuación diferencial que gobierna el sistema es:

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{\eta}{kB}(T - T_a)$$, donde:

k = conductividad térmica de la aleta

Con las condiciones : $T(0) = T_W$

$$\frac{dT}{dz}(L) = 0$$



a) Expresar el problema en forma adimensional

b) Obtener el sistema tridiagonal para h=0,2. Datos : $\sqrt{\frac{\eta L^2}{kB}} = 2$

c) Encontrar el perfil de temperatura en la aleta para h=0,2

d) Indicar la forma de los argumentos de entrad a la subroutina TM para los casos h=0,2 h=0,1, h=0,05

Problema 4:

En una esfera de radio R se genera calor a una velocidad constante, Q. En estado estacionario la ecuación que modela el sistema es:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=-Q$$

Sujeto a las condiciones de contorno

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0}=o$$

$$-k\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=R}=hT$$

Determinar el perfil de temperaturas en la esfera.

Datos:
Q=4000 W/m^3
R=1 m
K= 0,6 W/(m ºc)
H= 20 W/(m^2 ºC)

Problema 5:

Demostrar que a partir de las diferentes formas de la expresión de Taylor se pueden obtener:

a) las aproximaciones por diferencias haca delante y hacia atrás de la primera derivada de una función y con un orden de exactitud proporcional a h.
b) las aproximaciones por diferencias centrales de la primera derivada de una función y con un orden de exactitud proporcional a h^2.
c) La aproximación a la segunda derivada mediante diferencias centrales con un orden de exactitud proporcional a h^2

Problema 6:

Dada una ODE-BVP: $-y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ con condiciones de integración límites de valor constante en ambos extremos $y(a)=\alpha,\quad \mathrm{y(b)}=\beta,$ demostrar que puede transformase en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales tridiagonal y obtener los valores de los coeficientes de la matriz tridiagonal.