TEMA 9:

TIPOS DE PROBLEMAS DE VALOR FRONTERA EN MÁS DE UNA DIMENSIÓN ESPACIAL EN INGENIERÍA QUÍMICA

PROBLEMAS PROPUESTOS

Asignatura:	**Cálculo Avanzado de Procesos Químicos.**
Titulación:	**Ingeniería Química**
Curso:	**Cuarto**
Cuatrimestre:	**Primero**

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Problema 1:

Demostrar, utilizando la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas, que para un problema de Dirichlet aplicando diferencias finitas se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas que cumple

$\overline{A} * \overline{U} = \overline{f}$, siendo:

$$A = \begin{bmatrix} J & I & 0 & 0 & 0 \\ I & J & I & 0 & 0 \\ 0 & I & J & I & 0 \\ 0 & 0 & I & J & I \\ 0 & 0 & 0 & I & J \end{bmatrix}$$ con dimensiones $(n-2)^2 \ x \ (n-2)^2$ siendo (n-2) los nodos interiores en cada dirección espacial

I= matriz identidad de dimensiones $(n-2) \ x \ (n-2)$

$$J = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$, matriz de dimensiones $(n-2) \ x \ (n-2)$

$$U = \left[U_{1,1},........U_{n-1,1}, U_{1,2},......., U_{n-1,2},..........., U_{1,N-2},.........U_{N-2,N-2}\right]^{\tau}$$

$$f = \begin{bmatrix} f(0,y_1) + f(x_1,0), f(x_2,0),.....f(xn-2,0) + f(1,y1), f(0,y_2),0......0.f(1,y_2),....f(0,y_{n-2}) + \\ f(x_1,1),\ f(x_1,1),\ f(x_2,1),......f(x_{n-2},1) + f(1,y_{n-2}) \end{bmatrix}^{\tau}$$

Comentario: para simplificar el problema utilizar tres nodos interiores en cada dirección espacial con $\Delta x = \Delta y$

Problema 2:

Realizar la misma demostración para la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas con condiciones de frontera de Neumann definidas por:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{i=0} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{i=2} = 2y\,, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{j=0} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{j=2} = 2x$$

Problema 3:

Fuente: **Gerald, C.F., Wheatley, P. O.;** *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company. 1994. (Pág. 552).

El siguiente es un problema típico de flujo de calor en estado estacionario: Una lámina rectangular plana de acero de dimensiones 10 x 20 cm (Figura 1) tiene una de sus bordes a 100ºC y los otros tres a 0ºC ¿Cuales son las temperaturas en los nodos interiores en estado estacionario?

a) h=5 cm
b) h=2,5 cm

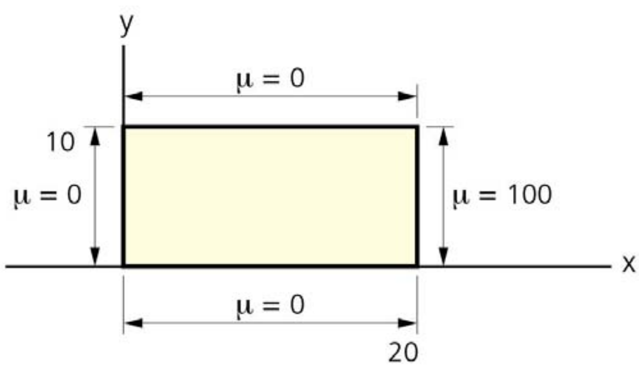

Figura 1. Lámina de acero

Problema 4:

Fuente: **Riggs, J. B.;** *An Introduction to Numerical Mehods for Chemical Engineers.* Texas Tech University Press. 1994. (Pág. 285).

Considerar la distribución de potencial de un cilindro como el de la Figura 2. La base del cilindro es el electrodo negativo y el electrodo positivo es la parte exterior de la mitad superior del cilindro. El cilindro está relleno de una solución electrolítica de conductividad 0,002 Ω^{-1} m^{-1}. El voltaje aplicado es de 10 volts. El radio y la altura del cilindro son 1 m.

La distribución de potencial en estado estacionario obedece a la ecuación de Laplace $\left(\nabla^2\phi = 0\right)$ Esta ecuación en coordenadas cilíndricas se expresa:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0$$

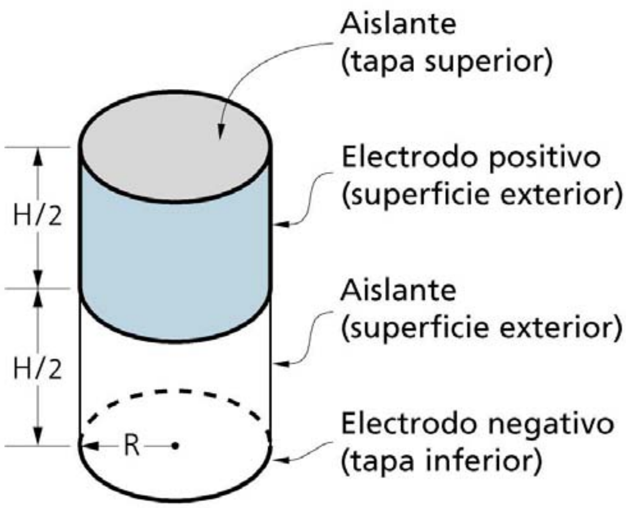

Figura 2.

a) Establecer las condiciones frontera de este problema.

b) Obtener el sistema de ecuaciones algebraicas que permiten determinar la distribución de potencial.

c) Si se obtiene la solución del apartado b (para lo cual sería necesario resolver el sistema de ecuaciones) ¿cómo se podría hallar la distribución de corriente en el electrodo negativo (z=0, $0 \le r \le R$)?