Matemáticas para Economistas

Parte II
Optimización Clásica y con Restricciones

Tema 6
Optimización con Restricciones

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

6 Optimización con Restricciones

6.1 Optimización con Restricciones de de Igualdad

6.2 Optimización con Restricciones de Desigualdad

6.1 Optimización con Restricciones de Igualdad

6.1.1 Función de Lagrange

6.1.2 Puntos Críticos de la Función de Lagrange

6.1.3 Óptimos Locales de la Función de Lagrange

6.1.4 Óptimos Globales

6.1.5 Interpretación Económica de los Multiplicadores de Lagrange

6.1 Optimización con Restricciones de Igualdad

$$
\left\{
\begin{array}{l}
opt \;\; f(\underline{x}) \\
s.a. \\
g_1(\underline{x}) = b_1 \\
g_2(\underline{x}) = b_2 \\
\ldots \\
g_m(\underline{x}) = b_m
\end{array}
\right.
$$

6.1.1 Función de Lagrange

$$L(\underline{x},\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)=$$

$$= f(\underline{x})-\lambda_1(g_1(\underline{x})-b_1)-\lambda_2(g_2(\underline{x})-b_2)\ldots-\lambda_m(g_m(\underline{x})-b_m)$$

6.1.2 Puntos Críticos de la Función de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(\underline{x}0, \underline{\lambda}0) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(\underline{x}0, \underline{\lambda}0) = 0 \\ \cdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}(\underline{x}0, \underline{\lambda}0) = 0 \end{cases}$$

6.1.3 Óptimos Locales de la Función de Lagrange

$$HL_{\underline{x}}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_n}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_1}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_n}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n x_1}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n x_2}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}\left(\underline{x}_0,\underline{\lambda}_0\right) \end{bmatrix}$$

6.1.3 Óptimos Locales de la Función de Lagrange

Si $HL_{\underline{x}}\left(\underline{x}_0, \underline{\lambda}_0\right)$ **es definida positiva, entonces $\underline{x}_0$ es un mínimo local estricto del problema de optimización con restricciones de igualdad.**

Si $HL_{\underline{x}}\left(\underline{x}_0, \underline{\lambda}_0\right)$ **es definida negativa, entonces $\underline{x}_0$ es un máximo local estricto del problema de optimización con restricciones de igualdad.**

6.1.4 Óptimos Globales

- Si f es convexa en el conjunto factible X, entonces los mínimos locales de f en X, en caso de existir, son mínimos globales
- Si f es estrictamente convexa en el conjunto X, entonces los mínimos locales de f en X, en caso de existir, son mínimos globales estrictos
- Si f es cóncava en el conjunto X, entonces los máximos locales de f en X, en caso de existir, son máximos globales
- Si f es estrictamente cóncava en el conjunto X, entonces los máximos locales de f en X, en caso de existir, son máximos globales estrictos

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

6.1.5 Interpretación Económica de los Multiplicadores de Lagrange

Partiendo de una función objetivo *f*, cuyo óptimo alcanza el valor $f(\underline{x}_0)$, el multiplicador de Lagrange λ_i nos indica, de forma aproximada, la variación que tendría dicho valor $f(\underline{x}_0)$ si aumentáramos una unidad el valor de b_i.

UC
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

6.2 Optimización con Restricciones de Desigualdad

$$\left\{\begin{array}{l} opt\ \ f(\underline{x}) \\ s.a. \\ g_1(\underline{x}) \leq b_1 \\ g_2(\underline{x}) \leq b_2 \\ \ldots \\ g_m(\underline{x}) \leq b_m \end{array}\right.$$

Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Matemáticas para Economistas

Parte II
Optimización Clásica y con Restricciones

Tema 6
Optimización con Restricciones

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA